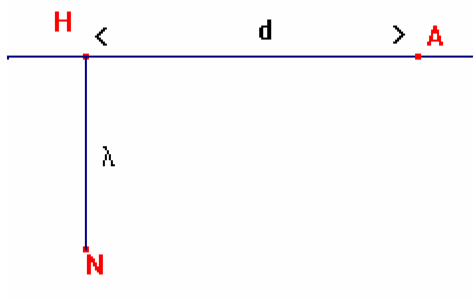
THÈME 46 : Étude de recherche d'optimum et d'optimisation

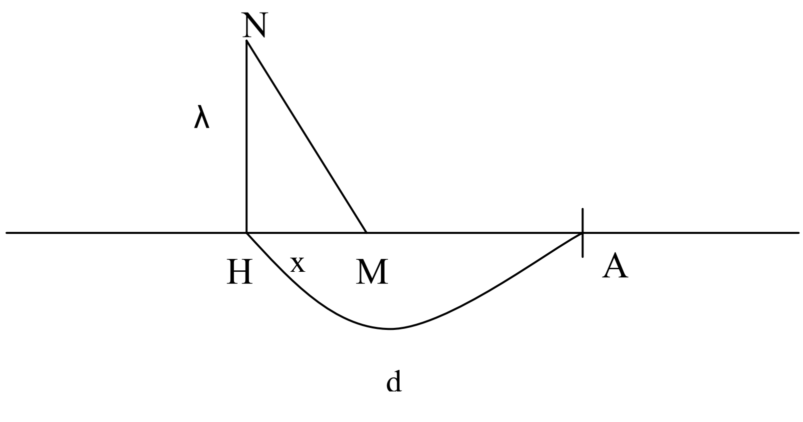
1. L'exercice proposé aux candidats

Un nageur N est dans la mer, à une distance λ du rivage rectiligne. Il veut rejoindre un point A du rivage, à une distance d du pied H de la perpendiculaire abaissée de N sur le rivage. Le nageur nage à une vitesse v, et peut marcher sur le rivage à une vitesse V > v.

Quel trajet doit-il suivre pour rejoindre le point A en le minimum de temps ? Quel sera ce temps minimum ?
Application numérique : v = 1km/h, V = 5 km/h, λ = 300 m, d = 100 m.



<u>Correction :</u>



Soit M le point du rivage où le nageur sort de l'eau.
À vitesse constante, le trajet le plus rapide entre deux points est la ligne droite.
Le temps T de parcours est égal à :

$$T = \frac{NM}{v} + \frac{MA}{V} ;$$

$$T = \frac{\sqrt{NH^2+HM^2}}{v} + \frac{HA-HM}{V} .$$

En posant x = HM, ($0 \leq x \leq d$), on en déduit une expression du temps de parcours en fonction de x : $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+\lambda^2}}{v} + \dfrac{d-x}{V}$.

<u>Recherche du minimum</u> :

$$T'(x)= \frac{x}{[v\times\sqrt{x^2+\lambda^2}]} - \frac{1}{V} = \frac{xV-v\times\sqrt{x^2+\lambda^2}}{vV\times\sqrt{x^2+\lambda^2}}.$$

$T'(x) \geq 0$ ñ $xV - v\sqrt{x^2+\lambda^2} \geq 0$ ñ xV Ã $v\sqrt{x^2+\lambda^2}$ ñ $x^2 V^2$ Ã $v^2(x^2+\lambda^2)$.

D'où, $T'(x)$ Ã 0 ñ x Ã $\dfrac{v\lambda}{\sqrt{V^2-v^2}}$ (V>v>0).

Alors,

Si $d \leq \dfrac{v\lambda}{\sqrt{V^2-v^2}}$, le minimum est obtenu lorsque x = d ; si $d > \dfrac{v\lambda}{\sqrt{V^2-v^2}}$ le minimum est atteint en $x_0 = \dfrac{v\lambda}{\sqrt{V^2-v^2}}$.

x	0	x_0	d
T'(x)	-		+
T(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Le minimum de la fonction est donc atteint en x_0.

Pour que le nageur arrive au point A en un minimum de temps, il doit atteindre le rivage au point M situé à $\dfrac{v\lambda}{\sqrt{V^2-v^2}}$ du point H entre le point H et A.

Le temps de parcours sera alors : $T(x_0) = \dfrac{\lambda\sqrt{V^2-v^2}+vd}{Vv}$.

<u>Application numérique</u> :

Si $x_0 = 61$ m, alors $T(x_0) = 18$mn 50s.

<u>Correction avec la variable $\varphi = \widehat{HMN}$</u>

$\varphi \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$; $NM= \dfrac{\lambda}{\sin(\varphi)}$ et $MA= d - HM = d - \dfrac{\lambda}{\tan(\varphi)}$.

Posons, $t(\varphi)= \dfrac{\lambda}{v.\sin(\varphi)} + \dfrac{d}{V} - \dfrac{\lambda}{V.\tan(\varphi)}$.

Alors , $t'(\varphi) = \dfrac{-\lambda\cos(\varphi)}{v\sin^2(\varphi)} + \dfrac{\lambda}{V\sin^2(\varphi)}$ et t' s'annule en φ_o avec $\cos(\varphi_o)= \dfrac{v}{V}$ (il faut donc que $0 < \dfrac{v}{V} < 1$) .

La fonction cos étant décroissante sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$, soit $0 < \varphi_1 < \varphi_o < \varphi_2 < \pi/2$.

On a alors : $\cos(\varphi_1) > \cos(\varphi_o) = \dfrac{v}{V} > \cos(\varphi_2)$, d'où $t'(\varphi_1) < 0$ et $t'(\varphi_2) > 0$.

On en déduit que t admet un minimum en φ_o…

2. Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sa solution de l'exercice sur la fiche. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé l'exercice :

A. Donneriez-vous la variable à choisir aux élèves ? Pourquoi ? Si oui, laquelle ? Pourquoi ?

B. Comment peut-on modifier l'énoncé pour que les élèves tombent dans un piège classique dans la recherche d'optimum par dérivation, et pour qu'ils en retirent un bénéfice pédagogique ?

C. Proposez d'autres exercices pour couvrir les questions à travailler sur la recherche d'optimums.

Réponses (en vert, les réponses de votre/vos camarade/s – en rouge, des éléments de réponses personnels).

Objectif de l'exercice :
Optimiser un trajet, au niveau du temps de parcours, sous certaines contraintes.
Méthodes :
- Modéliser la situation sous la forme d'une fonction à une variable ;
- Utiliser le calcul différentiel pour chercher le ou les extrema de cette fonction ;
- Vérifier l'appartenance au domaine des contraintes ;
- Conclure.

Difficultés :
- choix de la variable :
- Domaine des contraintes :

A.
Les exercices d'optimisation sont presque semblables en 1^{e} et en Terminale S. Les différences tiennent au fait qu'en 1^{e}
- les calculs de dérivées sont plus limités ;
- Le choix de la variable doit être suggéré par l'énoncé.

En conséquence si l'exercice devait être proposé à des élèves de 1^{e} S, la variable devrait être indiquée. En Terminale l'exercice pourra laisser le choix aux élèves.
Dans l'exercice la variable $x = HB$, où B est le point où le nageur rejoint le rivage, parait la plus naturelle et conduit à optimiser la fonction $t(x) = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 + x^2}}{v} + \dfrac{d - x}{V}$, $x \in [0, d]$.
Mais, dériver cette fonction n'est pas à la portée d'un élève de 1^{e} S.
Si on choisit pour variable $\alpha = \widehat{HBN}$, alors la fonction à optimiser s'écrit :

$$t(\alpha) = \frac{\lambda}{v \sin\alpha} + \frac{d}{V} - \frac{\lambda}{V \tan\alpha}, \text{ où } \alpha \in \left[\alpha_1, \frac{\pi}{2}\right], \ \alpha_1 / \tan\alpha_1 = \frac{\lambda}{d}.$$

Les fonctions à dériver sont alors de la forme $\frac{1}{u}$ et les élèves de 1e connaissent la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$, ainsi que la dérivée de la fonction tangente.

Si l'exercice est proposé pour un élève de 1ère S, l'optimisation en utilisant le calcul différentiel est un nouvel outil. L'enjeu est alors de travailler cette technique et il est préférable de proposer une variable. La dérivée de la composée de la fonction racine avec une fonction quelconque n'étant pas au programme de 1ère S (celui-ci se limite aux dérivées des fonctions du type $x \to \sqrt{ax+b}$), il paraît judicieux de *proposer* l'angle $\varphi = \widehat{HMN}$. De plus, celle-ci n'étant pas la première variable qui viendrait à l'esprit dans un exercice sur les distances, cela permettrait de développer des connaissances dans les choix de variables possibles lors d'une modélisation

À un niveau plus élevé, la modélisation devient aussi un enjeu de l'exercice et il est alors plus intéressant de laisser le choix de la variable aux élèves.

B.

Voir ci-dessous.

Une erreur classique serait que les élèves trouvent l'extremum et oublie de vérifier que celui-ci appartient bien à l'intervalle d'étude. Le piège serait donc de donner des valeurs telles que l'optimum sorte du domaine des contraintes. Dans notre cas (pour les mêmes valeurs de v et V) on choisirait $d \leq \frac{\lambda}{\sqrt{24}}$ (E).

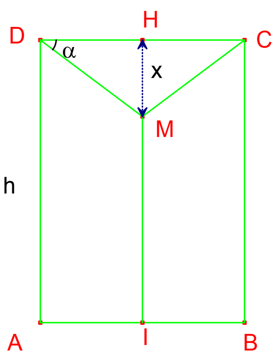
Il faudrait donc proposer, en plus de l'application numérique déjà donnée, des valeurs de λ et de d qui vérifient (E). Par exemple, d = 50 m.

De plus, pour que le piège soit pédagogiquement profitable, l'important serait que les élèves résolvent eux-mêmes ce problème. On pourrait toutefois les aider en leur demandant de faire un croquis de la situation afin de leur permettre de visualiser plus facilement la non pertinence de la réponse.

C. Autres proposition d'exercices

1. La gouttière (1e S Terracher, p. 107)

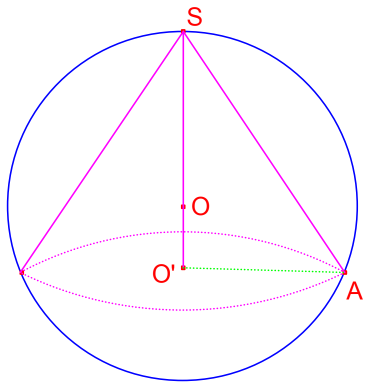
Contre la façade rectangulaire ABCD, on désire placer une gouttière en forme de Y pour évacuer les eaux de pluie recueillies en C et D (v ; figure). I est le milieu de [AB]. Où doit-on placer le point M pour que la longueur de tuyau soit minimale ? (On négligera l'épaisseur du tuyau.)



Notons h = AD et d = AI. Alors la longueur totale de tuyau vaut : 2DM + MI. Si x = HM, alors DM = $\sqrt{x^2+d^2}$ et MI = $h-x$. D'où $l\ (x) = 2\sqrt{x^2+d^2}+h-x$.
Les élèves de Terminale savent dériver une fonction de la forme $\sqrt{u(x)}$.
Si on pose $\alpha = \widehat{MDH}$, alors $l\ (\alpha) = \dfrac{2d}{\cos\alpha} + h - d\tan\alpha$, où $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Le calcul de la dérivée et du tableau de variation de la fonction l conduisent à trouver que le minimum est atteint lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. On remarque que cette valeur est indépendante de h et de d.

2. Cône inscrit dans une sphère

On inscrit un cône dans une sphère de centre O et de rayon R, comme indiqué sur la figure suivante.



Déterminer la distance *OO'* pour que ce cône ait un volume maximal.

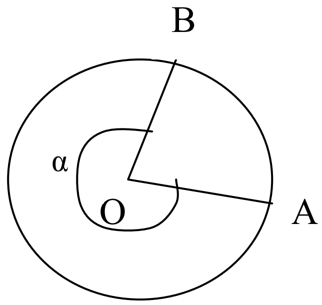
On pose *OO'* = x, alors $V = \dfrac{1}{3}\pi(O'A)^2 SO'$. Mais, $SO' = R + x$ et $(O'A)^2 = R^2 - x^2$.
On trouve $V'(x) = \dfrac{\pi}{3}(R^2 - 2Rx - 3x^2)$ et c'est por $x = \dfrac{R}{3}$ que le volume du cône est maximal.

3. La ficelle (1[e] S, Terracher, p. 117, n°5)

Exercice 1 (modélisation dans l'espace)
Recherche du volume maximal d'un cylindre inscrit dans une demi- sphère de centre O. Le cylindre et la demi-sphère ayant le même plan de base P et même axe de symétrie (Oz).

Exercice 2 (modélisation dans l'espace avec l'originalité de travailler à partir d'un patron (figure plane))
Dans un disque en carton de centre O et de rayon R=10cm, on découpe un secteur AOB tel que $\widehat{AOB} = \alpha$.

Avec ce secteur, on fabrique un cône de révolution (voir dessin). Pour quelle valeur de α le volume du cône est-il maximal ?



Correction :

On a : $\overset{\frown}{AB} = \alpha R$, donc αR sera le périmètre de la base du cône. En notant r le rayon de la base du cône, on obtient $\alpha R = 2\pi.r$ et donc $r = \dfrac{5\alpha}{\pi}$.

On en déduit la hauteur h du cône (Pythagore) : $h = \sqrt{OB^2\text{-}r^2} = \sqrt{100\text{-}25\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

Et le volume V du cône vaut : $V(\alpha) = \dfrac{125}{3\pi^2}\,\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

Puis étude des variations…

<u>Remarque :</u> en 1ère S on étudiera la fonction : $\alpha \rightarrow V^2(\alpha)$ pour éviter le problème de la composée avec la racine carrée.

Exercice 3 (modélise une situation à caractère économique)
Une entreprise artisanale fabrique des « mouches » pour la pêche.
Le profit réalisé par la production et la vente de ces mouches est modélisé par :
$B(q) = -1{,}5q^3 + 15q^2 + 48q - 34$, où q est le nombre de mouches en milliers, $q \in [1\,;12]$ et B(q) est exprimé en euros.
Déterminer le sens de variation de la fonction B, et en déduire la quantité de mouches à produire et à vendre pour réaliser le bénéfice maximal.

Correction :

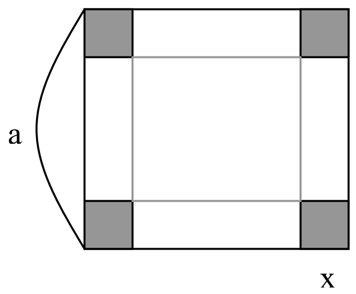
$B'(q) = -\,4{,}5q^2 + 30q + 48$

$\Delta = 900 + 18 \times 48 = 1764 = 42^2$ d'où $q_1 = -\dfrac{4}{3}$ et $q_2 = 8$.

x	1	8	12
B'(x)	+		-
B(x)	↗		↘

Il faut donc produire et vendre 8000 mouches pour réaliser le bénéfice maximal.

Exercice 4 :



Sur un carré de côté a, on enlève aux quatre coins, un carré de côté x afin d'obtenir le patron d'un bac de hauteur x (voir figure).
Déterminer x pour que le volume du bac soit maximal.
Correction :

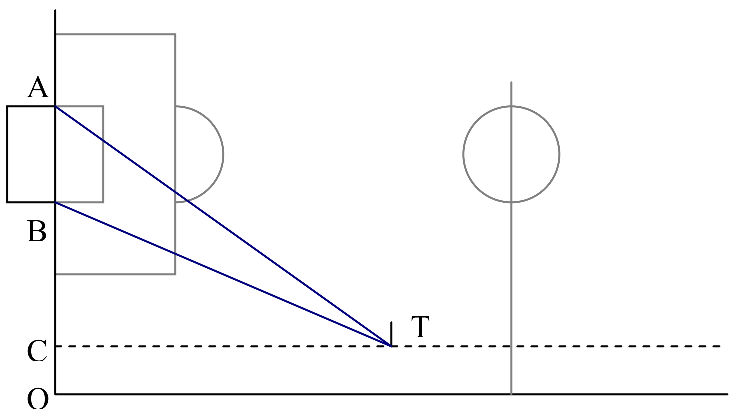
Domaine des contraintes : $x \in [0 ; \frac{a}{2}]$.

$V(x) = x(a-2x)^2$ et $V'(x) = (a-2x)(a-6x)$. D'où :

x	0		a/6		a/2
V'(x)		+		-	
V(x)		↗		↘	

Exercice 5 :

La droite (TC) est perpendiculaire à (AB). Un joueur de football se déplace sur (CT) en direction du but.
A quelle distance de la ligne de but a-t-il l'angle de tir le plus grand ?



Notations : $\alpha = \widehat{ATB}$, $AB = k$, $OB = h$, $OC = a$, $0 < a \leq h$.

Correction:

On pose CT = x , $x \in \,]0\,;+\infty[$ et on se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ car dans le triangle ATB l'angle $\widehat{TBA}$ est obtus ou droit.

D'où, si $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, la somme des angles du triangle est strictement supérieure à π, ce qui est absurde.

L'angle α est max lorsque $\cos(\alpha)$ est minimal car la fonction cos est décroissante sur $]0\,;\pi/2[$

et $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{TB}\cdot\overrightarrow{TA}}{TB.TA} = \dfrac{(0-x)(0-x)+(h-a)(k+h-a)}{\sqrt{x^2+(h-a)^2}.\sqrt{x^2+(k+h-a)^2}} = \dfrac{x^2+(h-a)(k+h-a)}{\sqrt{x^2+(h-a)^2}.\sqrt{x^2+(k+h-a)^2}}$.

Puis, on étudie la fonction $f(x)= \cos(\alpha)$.

…

Autre correction possible :

α est max lorsque $\tan(\alpha)$ est max car la fonction tan est croissante sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$

Et, en posant $b = \widehat{CTB}$, $c = \widehat{CTA}$, on a : $\tan(\alpha) = \tan(c-b) = \dfrac{\tan(c)-\tan(b)}{1+\tan(c)\tan(b)}$.

D'où : $F(x) = \tan(\alpha) = \dfrac{kx}{x^2+(k+h-a)(h-a)}$.

Puis étude des variations de F.

Remarque : ce type d'exercice doit être proposé en fixant les grandeurs a, h et k.