Thème : optimisation

Introduction :

- C'est un problème que l'on résout graphiquement ou numériquement, qui consiste à trouver la configuration idéale, le meilleur pour une situation donnée.

- Ces problèmes n'ont pas de place précise dans le programme, mais sont le plus présents à partir du lycée :
  - → en seconde on les rencontre notamment avec l'utilisation des fonctions polynomiales du second degré.
  - → en première et en terminale on les rencontre principalement avec l'étude des variations d'une fonction grâce à sa dérivée.

- L'exercice proposé se situe en seconde et consiste en l'étude du minimum de grillage nécessaire pour créer une cressonnière rectangulaire d'aire 1800 m². Les deux versions de l'exercice proposées amènent une prise d'initiative différente pour les élèves.

1. Comparer les compétences développées par les deux versions de l'exercice (professeur/manuel)

-Exercice version professeur :
- Mettre plusieurs termes sur le même dénominateur
- Développer et factoriser une expression (reconnaître une identité remarquable)
- Étudier le signe d'un fonction sur un intervalle donné
- Montrer qu'une fonction admet un minimum à l'aide d'une autre fonction (ppté : pour tout x, $f(x) \sim f(a)$)
- Déduire la valeur de x pour laquelle ce minimum est atteint

-Exercice version manuel :
- Modéliser un problème
- Choisir une variable et en déduire une fonction
- Factoriser la fonction (par identité remarquable ou forme canonique)
- Trouver le minimum de la fonction en montrant qu'elle est supérieure à une valeur fixe (ppté : pour tout x, $f(x) \sim f(a)$)
- Calculer la valeur de x pour laquelle le minimum est atteint

En conclusion : Dans la version du professeur (dite « à l'ancienne »), on remarque qu'une seule compétence se détache : le calcul algébrique, sauf pour la question 5 où l'élève doit connaître la définition du minimum d'une fonction et trouver sa valeur.
La version du livre (dite « nouvelle ») ne donne aucune indication, tout est à la charge de l'élève, ce qui lui laisse une très grande place pour la prise d'initiative dans l'exercice. Cependant, ceci peut aussi donner à l'élève une plus grande difficulté pour la résolution du problème s'il ne trouve pas la démarche à suivre (par exemple pour trouver f(30) : il serait intéressant d'étudier le graphique de la fonction pour voir qu'il s'agit du minimum, puis d'étudier le signe de la différence entre f(x) et f(30)).

2. Proposer une correction des questions 3 et 5 de l'exercice du professeur telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde

Q3). A la question 2 on trouve $h(x) = 2x^2 - 120x + 1800$.

On commence par factoriser par 2, on obtient :

$h(x) = 2(x^2 - 60x + 900)$

On reconnaît une identité remarquable de la forme $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$:

$h(x) = 2(x^2 - 2*30x + 30^2)$

$h(x) = 2(x - 30)^2$

Q5). A la question 4 on trouve que g(x) est positive pour tout réel x appartenant à [1;100], donc pour tout x appartenant à [1;100] on a :

$g(x) \sim 0$ ceci équivaut à $f(x) - f(30) \sim 0$ par définition de g

autrement dit $f(x) \sim f(30)$

Ainsi, d'après la définition du minimum d'une fonction f vue en seconde, on sait que f admet un minimum : $f(30) = 120$ et ce minimum est atteint pour la valeur $x = 30$.

3. Proposer deux ou trois exercices sur le thème optimisation :

Exercice 1 (2de)

ABC est un triangle équilatéral de côté 12 cm et I est la milieu du segment [AB].
M est un point du segment [AI] et N est le point du segment [AB] distinct de M tel que AM = BN.
Q est le point du segment [BC] et P est le point du segment [AC] tels que MNQP soit un rectangle.
On cherche les dimensions du rectangle d'aire maximale.

1. Modéliser le problème.
2. Conjecturer à l'aide de Géogébra.
3. Démontrer la conjecture.

Intérêts :

- Prise en main du problème par la modélisation
- Prise d'initiative pour la variable
- Triangle équilatéral connu en seconde, donc problème à portée des élèves et plus grande liberté de réflexion

Exercice 2 (Tle S)

Robinson, en vacances dans une maison côtière (que l'on notera par un point M), se promène dans son canot à moteur. Distrait par un dauphin, il heurte un récif qui éventre son embarcation. Il doit alors rentrer à la nage puis à pied.

Le lieu du naufrage (que l'on notera par un point N) est à un kilomètre du point le plus proche de la côte (que l'on notera par un point A), supposée rectiligne. On sait de plus que, le long du rivage, la distance AM mesure 10 kilomètres. Robinson évalue ses vitesses moyennes à 3km/h dans l'eau et 5km/h sur terre.

On s'interroge sur le point de la côte (que l'on notera par un point K) que Robinson doit atteindre pour rejoindre au plus vite la maison.

1. Modéliser le problème.
2. Conjecturer à l'aide de Géogébra.
3. Démontrer la conjecture.

Intérêts :

- Prise en main du problème par la modélisation
- Évidence de la variable, mais permet d'étudier une fonction qui va utiliser un nouvel outil de terminale S : la dérivée d'une fonction composée (ici la racine d'une fonction u(x)).