Différents types de raisonnement en mathématiques

I) Symboles logiques

1) Les quantificateurs

Les quantificateurs permettent de connaitre le domaine de validité d'une propriété.

a) Pour une propriété universelle

Définition : Pour énoncer une propriété universelle (propriété vrai dans tous les cas), on utilise le quantificateur 'pour tout', noté ∀.

Remarque : Il signifie 'pour tout', 'quel que soit' ou encore 'Tous'.

Exemple :

Tout parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle
Quel que soit x, x² est positif ou nul.
Tous les ans, Noël est en décembre.

Remarque : Le quantificateur 'pour tout' est souvent implicite :

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

b) Pour une propriété non universelle

Définition : Pour énoncer une propriété vrai sur des exemples mais qui n'est pas universelle, on utilise le quantificateur 'il existe', noté ∃

Exemple :

Il existe des réels x tels que $x^2 > 100$
Il existe des années où il ne neige pas

Propriété :

Le contraire d'une proposition avec 'pour tout' est une proposition avec 'il existe'
Le contraire d'une proposition avec 'il existe' est une proposition avec 'pour tout'

Exemple :

Toutes les fenêtres sont fermés → Il existe (au moins) une fenêtre ouverte
Il existe des losanges qui ne sont pas des carrés → Tout les carrés sont des losanges

2) Connecteurs logiques

a) Conjonction

Définition : La conjonction logique de deux évènements représente le faite que deux évènements sont conjoints.

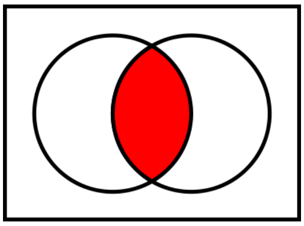
Définition : La conjonction de deux propositions P et Q est vrai si les deux propositions sont simultanément vraies, sinon elle est fausse.
Il est symbolisé par $\wedge$

Table de vérité :

P	**Q**	**P $\wedge$ Q**
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

P	**Q**	**P $\wedge$ Q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Définition : L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B. On note cette intersection $A \cap B$



b) Disjonction

Définition : La disjonction logique de deux évènements représente le faite que deux évènements sont disjoints.

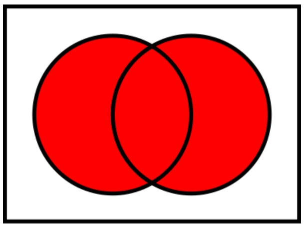
Définition : La disjonction de deux propositions P et Q est vrai quand l'une des propositions est vrai et est fausse quand les deux sont simultanément fausse.
Il est symbolisé par $\vee$

Table de vérité :

P	**Q**	**P $\vee$ Q**
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

P	**Q**	**P $\vee$ Q**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Définition : L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B. On note cette intersection $A \cup B$



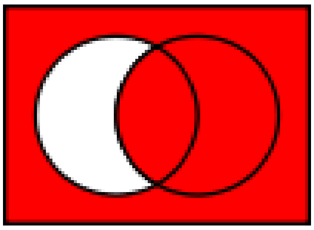
3) Implication

Le principe même du raisonnement mathématique est l'implication (propriété directe) : un fait implique un autre, une hypothèse implique une conclusion.

a) Implication

Définition : L'implication logique de deux évènements représente le faite que un évènement implique un autre évènement

Définition : L'implication de deux propositions P et Q est faux si P est vrai et Q est fausse.
Il est symbolisé par $\Longrightarrow$.



Remarque : $P \Longrightarrow Q$ peut aussi se lire P seulement si Q

Table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Propriété : Les propositions suivantes sont toujours vraies :

$P \Longrightarrow P$

$P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow P)$

$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow ((Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R))$

$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow (((P \Longrightarrow R) \Longrightarrow Q) \Longrightarrow Q)$

$(\neg P \Longrightarrow P) \Longrightarrow P$

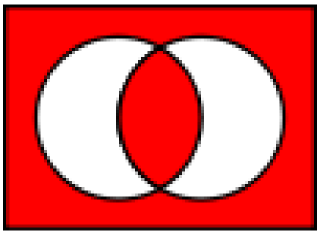
$\neg P \Longrightarrow (P \Longrightarrow Q)$

Propriété : Les propositions suivantes sont équivalentes :

$P \Longrightarrow Q$ équivalent à $\neg(P \wedge Q)$ équivalent à $(\neg P) \vee Q$

b) Equivalence

Définition : L'équivalence logique de deux évènements représente le faite que deux évènements sont équivalents



Définition : L'équivalence de deux propositions P et Q est vrai si les deux propositions sont vraies ou les deux propositions sont fausses, sinon, elle est fausse.
Il est symbolisé par $\Leftrightarrow$

Remarque : P $\Leftrightarrow$ Q peut aussi se lire

P si et seulement si Q
Pour que P, il faut et suffit que Q
Une condition nécessaire et suffisante pour P est Q
P est une condition nécessaire et suffisante pour Q
P équivaut à Q

Table de vérité :

P	**Q**	**P $\Leftrightarrow$ Q**
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai

P	**Q**	**P $\Leftrightarrow$ Q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Propriété : Les propositions suivantes sont équivalentes :

$P \Leftrightarrow Q$
$(P \Rightarrow Q) \land (Q \Rightarrow P)$
$(P \land Q) \lor (\neg Q \land \neg P)$

c) Réciproque

Définition : La réciproque d'une implication inverse l'ordre des évènements. Si P implique Q, sa réciproque est Q implique P

Propriété : Une propriété et sa réciproque ne sont pas toujours équivalente

d) Contraposée

Définition : Si P implique Q, sa contraposée est nonQ implique nonP

Propriété : Une propriété et sa contraposée sont toujours équivalente.

II) Différents raisonnement

1) Raisonnement par induction

Le raisonnement par induction et présomption est l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs), dont on déduit par présomption, une propriété générale.

En mathématique, ce raisonnement ne se conçoit en général que comme une première étape conduisant à une conjecture. Il restera ensuite, par un raisonnement déductif, à démontrer la véracité de cette conjecture.

Exemple :
- Deux points A et B étant donnés, déterminer l'ensemble de tous les points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle (geogebra)
- Quand on lance successivement deux dés, en additionnant les nombres présents sur les deux faces, la probabilité d'obtenir 10 est-elle la même que celle d'obtenir un 9 ? (excel)

2) Raisonnement par déduction

Le raisonnement par déduction est l'étude à partir de propriétés reconnues comme vraies, un enchainement logique pour montrer une propriété.

a) Raisonnement direct

Définition : On cherche à montrer que l'assertion 'P implique Q' est vrai. On suppose que P est vrai, et on veut montrer qu'alors Q est vrai.

Remarque : Cette méthode est la plus utilisée car la plus naturelle.

Exemple :
- Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier strictement plus grand que lui.
- Une corde non élastique de 101m est attachée au sol entre deux piquets distants de 100m. Johanna tire la corde en son milieu et la lève aussi haut qu'il peut. Sachant qu'elle mesure 1,68m, peut-elle passer dessous sans se baisser ?
- Quel est le dernier chiffre de 2 puissances 50 ?

b) Raisonnement par disjonction de cas

Définition : Si l'on souhaite vérifier une assertion P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie de E puis pour tous les x n'appartenant pas à A

Remarque : On partitionne l'ensemble E en $E = A \cup E \backslash A$

Exemple :

- Pour tout rationnel, il existe un entier strictement plus grand que lui.
- Pour tout entier n, n^2+3n est pair

c) Raisonnement par contraposition

Définition : Le raisonnement par contraposée permet de démontrer qu'une implication du type : 'P implique Q' est vrai. Ce raisonnement est basé sur l'équivalence entre l'assertion P 'P implique Q' et l'assertion 'non Q implique non P'.
Donc si l'on souhaite montrer l'assertion 'P implique Q', on montre en faite que si non Q est vraie alors non P est vraie.

Exemple :

- Montrer que si x et y sont des réels distincts, et différents de 1, alors $\frac{1}{x-1}$ est différent de $\frac{1}{y-1}$
- Montrer que pour tout entier n, si n^2 est impair alors n est impair

d) Raisonnement par l'absurde

Définition : Le raisonnement par l'absurde pour montrer l'implication 'P implique Q, repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vrai et que q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vrai, alors Q doit être vrai et donc 'P implique Q' est vraie.

Exemple :

- Soit f une fonction définie sur R, à valeur dans R. On suppose que f est continue sur R mais ne s'annule pas sur R. Montrer que f garde un signe constant sur R
- Montrer que $\sqrt{2}$n'est pas un rationnel.

e) Raisonnement par l'utilisation d'un contre exemple

Définition : Si l'on veut montrer une assertion du type : 'pour tout x de E, P(x)' est vraie alors pour chaque x de E, il faut montrer que P(x) est vraie. Par contre, pour montrer que cette affirmation est fausse, il suffit de trouver un x de E tel que P(x) soit fausse.
Trouver un x, c'est trouver un contre-exemple à l'assertion 'pour tout x de E, P(x)'.

Exemple :

- Tout entier positif est somme de trois carrés. Cette affirmation est-elle vrai ?
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui n'admettent pas de limite, alors la suite (u_nv_n) n'admet pas de limite. Cette affirmation est-elle vrai ?

f) Raisonnement par récurrence

<u>Définition :</u> Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion P(n), dépendante de n est vrai pour tout n entier naturel. La démonstration se déroule en 3 étapes :

Initialisation : On prouve que P(0) est vraie.

Hérédité : On suppose n positif donné avec P(n) vrai et on démontre que l'assertion P(n+1) est vrai

Conclusion : on rappelle que par le principe de récurrence, P(n) est vrai pour tout n entier naturel.

<u>Remarque :</u>

Le principe de récurrence est basé sur la construction de N. En effet un des axiomes pour définir N est le suivant : Soit A une partie de N qui contient 0 et telle que si n appartient à A, alors n+1 appartient aussi à A, on a A = N.

La récurrence si dessus est dite récurrence simple. Il existe aussi des récurrences doubles, triples, …

<u>Exemple :</u>

- La somme de 10 termes consécutifs de la suite de Fibonacci est égale au produit du septième terme par 11.
- Pour n appartenant à N, on note P(n) l'assertion $n ! \geq 2^n$. Montrer que P(n) est vrai à partir d'un certain rang. Lequel ?

g) Raisonnement par analyse synthèse

<u>Définition :</u> Pour justifier l'existence et parfois l'unicité d'une solution, on peut être amené à déterminer la forme de celle-ci (forme qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé). On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : On suppose qu'il existe au moins une solution et on essaye d'en tirer le maximum de renseignement la concernant. Cette étape assure parfois l'unicité.

Synthèse : On reporte dans le problème la ou les solutions trouvées précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution au problème, puis une unique ou plusieurs. Cette étape assure l'existence.

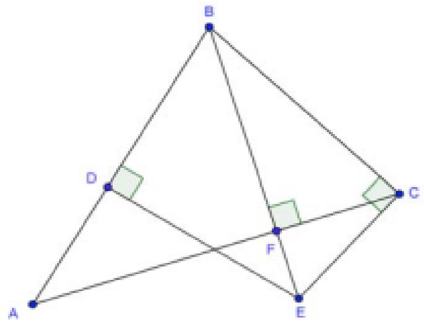
<u>Exemple :</u>

- Soit $f(x) = 2x^3 - 45x^2 - 34x + 80 = (x-2)(x+8)(x+1)(x-5)$. Quels est le minimum de la fonction.
- Montrer que toute fonction f sur R s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Utiliser aussi en géométrie :

Exercice 14, à partir de la quatrième :

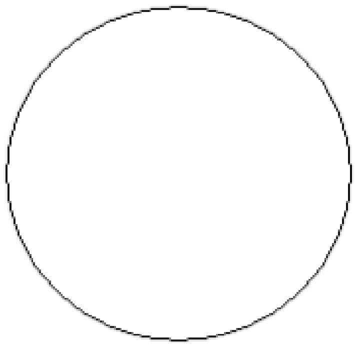
On donne la figure codée ci-contre.
Écrire un énoncé permettant de la construire.



Dans cet exercice, il s'agit d'analyser une figure codée afin de produire une consigne de construction : l'élève doit identifier en particulier l'ordre et les modalités des constructions.
On peut compléter un tel exercice en demandant à l'élève d'imaginer des questions à poser à partir de cette figure.

Exercice 15[4]**,** à partir de la sixième :

Construire le centre du cercle donné ci-contre, en laissant apparents les traits de construction.



Cet exercice permet la mise en œuvre de différentes stratégies :

- Milieu d'une corde de longueur maximale (utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, d'un