Tout ce qui est en bleu sera dit à l'oral ou nous sera éventuellement utile pour les questions venant du jury; le reste sera projeté.

Leçon 29. Droites remarquables du triangle

Introduction (à l'oral): Cette leçon se déroule durant le cycle du collège.

Pré-requis:
Triangles isocèles, équilatéraux, rectangle, non aplati, hypoténuse, segment, équidistance, milieu d'un segment, théorème de Pythagore, propriétés d'un cercle (équidistance entre milieu et points du cercle; cercle autour d'un triangle rectangle alors hypoténuse = diamètre et sommet angle droit = point du cercle), notions autour des perpendiculaires et parallèles, connaissance sur le rapporteur *(pour les bissectrices)*, point d'intersection, symétrie axiale.

I.Médiatrices

1.Médiatrice d'un segment (6ème)

Déf: La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par le milieu du segment.

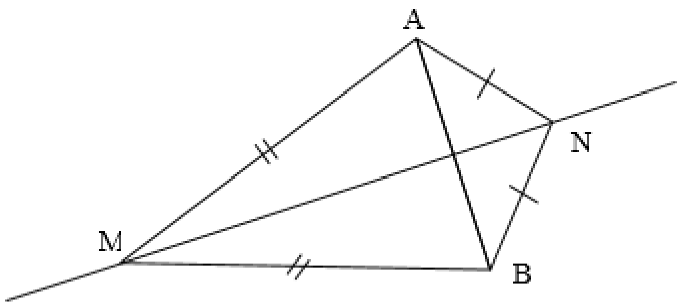
Ppté1: Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.

Démo : *Soit M tel que AM = BM, et M' le milieu de [AB]. Par la symétrie d'axe (MM'), B est l'image de A, M de M et M'de M'. Le triangle BM'M est donc l'image du triangle AM'M, les angles BM'M et AM'M sont donc égaux, or ils sont supplémentaires, ce sont donc des angles droit. La droite (MM') est donc perpendiculaire au segment [AC] et passe par son milieu M', c'est donc la médiatrice de ce segment. M appartient donc à la médiatrice de [AB]*
(Au tableau : schéma + Si MA=MB, alors M appartient à la médiatrice de [AB])

Ppté2: Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités de ce segment.

Démo: *Soit M un point sur la médiatrice du segment [AB]. Soit I le milieu de [AB]. On a donc que le triangle AIM et BIM sont rectangle en I. Par Pythagore, on a $MA^2 = AI^2+IM^2 = BI^2+IM^2 = BM^2$. Donc AM = BM*
(Au tableau : schéma + Si (d) est la médiatrice de [AB] et si M appartient à (d), alors MA=MB)
(A l'oral : A la suite de cette Déf et ces Pptés aura lieue l'apprentissage de la construction à la règle et au compas des médiatrices)

Exercice d'application: D'après la figure suivante, démontrer que (MN) et (AB) sont perpendiculaires.



2. Point de concourt des médiatrices d'un un triangle (5ème)

Ppté3: Dans tout triangle, les trois médiatrices se coupent en un même point.

Démo: *Soit un triangle ABC et appelons O le point d'intersection des médiatrices de [AB] et de [BC]. Le point O existe car, sinon, les médiatrices seraient parallèles et du coup les côtés [AB] et [BC] qui leurs sont perpendiculaires seraient eux aussi parallèles, ce qui est contradictoire avec le fait que ABC soit un triangle (non aplati). Les points de la médiatrice de [AB] sont équidistants de A et B. Les points de la médiatrice de [BC] sont équidistants de B et C. Le point d'intersection O de ces deux médiatrices se trouve donc à égale distance de A, B et C. En particulier, O est à égale distance de A et C, donc O appartient à la médiatrice de [AC]. Les trois médiatrices sont donc bien concourantes en un même point (O pour notre cas).*

Déf: Le cercle qui passe par les trois sommets d'un triangle s'appelle le cercle circonscrit à ce triangle.

Ppté4: Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Démo: *Le point O appartient à l'intersection des médiatrices donc O est a équidistance de A, B et C donc OA=OB=OC. Il existe donc un cercle de centre O de rayon OA qui contient A, B et C.*

Exercice d'application

Exercice

1. Construis un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B. Construis le symétrique L du point A par rapport au point M.
2. Soit I le point d'intersection des droites (LO) et (BM). Que représente le point I pour le triangle LAB ? Justifie la réponse.
3. La droite (AI) coupe le segment $[LB]$ en J. Que peut-on dire qu point J ? Pourquoi ?

Figure sur géogébra

II. Hauteurs

Déf: Une hauteur d'un triangle est la droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet. On dit que la hauteur est issue du sommet par lequel elle passe.
Ppté: Dans tout triangle, les trois hauteurs se coupent en un même point.

Déf: On appelle orthocentre le point d'intersection des hauteurs d'un triangle.

Démo: *Soit ABC un triangle. On trace la parallèle à (BC) qui passe par A, puis on trace la parallèle a (AB) qui passe par C et la parallèle a (AC) qui passe par B. On trace ensuite la hauteur issue du sommet B. On appelle H le point d'intersection de la hauteur et de la droite (AC) (voir géogébra). On montre que B,D et E sont alignés (avec les parallèles du parallélogramme). Puis que B milieu de [DE] (avec les longueurs opposés d'un parallélogramme égaux). On montre que (BH) médiatrice de (DE) (conclusion des 2 résultats précédents). On a la même chose pour les autres hauteurs. Donc les hauteurs de ABC sont les médiatrices du triangle DEF qui sont concourantes en un unique point.*

Exercice d'application.
Construire un segment [BC] de longueur 8,9cm
Placer un point H sur [BC] tel que BH=3,7cm.
Placer un point O tel que (OH) soit perpendiculaire à (BC) et que OH=3,4cm.
Construire le point A tel que le point O soit l'orthocentre du triangle ABC

III. Médianes

Déf: Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Ppté: Dans tout triangle, les trois médianes se coupent en un même point.

Dèf: On appelle centre de gravité le point d'intersection des médianes d'un triangle.

Démo: *Soit ABC un triangle. On place I milieu de [AB], J milieu de [BC]et K milieu de [AC]. On place G, le point d'intersection de [CI] et [AJ]. On place N symétrique de G par rapport à I et M symétrique de G par rapport à J. (voir géogébra). On montre que ANBG et GBMC sont deux parallélogrammes (diagonale qui se coupe en leur milieu). On en déduit que ANMC est aussi un parallélogramme. Puis on montre que G milieu de CN. Par le théorème des milieux, on a (KG) parallèle à (AN). Or (AN)//(KG)//(GB) alors K,G,B sont alignés. Or, (KB) est une médiane et G appartient a celle-ci. Donc médiane concourante en G.*

Ppté: Le centre de gravité d'un triangle se situe au 2/3 de chaque médiane à partir du sommet.

Démo: *Démonstration : Soit ABC un triangle. Soit A' et B' les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC]. Les droites (AA') et (BB') sont donc les médianes issues respectivement de A*

et B du triangle ABC. On note G leur point d'intersection. On construit le point D symétrique de C par rapport à G. On note E le point d'intersection des droites (AB) et (CD).
On sait que G est le milieu de [CD], donc CG = GD.
On sait aussi que E est le milieu de [GD], donc GE = ED = 1/2 GD = 1/2 CG.
On a donc : CE = CG + GE = CG + 1/2 CG = 3/2 CG. D'où : CG = 2/3 CE.
D'une manière analogue, on pourrait démontrer que AG = 3
2 AA' et BG = 3
2 BB'

Exercice d'application

__Exercice__ Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Le point E est le milieu du segment $[AB]$ et les segments $[AC]$ et $[DE]$ se coupent en G.

1. (a) Que représente le segment $[AO]$ pour le triangle ABD ? Justifie.
   (b) Que représente le point G pour le triangle ABD ? Justifie.
2. Démontre que la droite (BG) coupe le segment $[AD]$ en son milieu.

Figure sur geogebra

<u>IV. Bissectrices</u>

Déf: La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle**.**

Ppté1: La bissectrice issue d'un angle partage l'angle en deux angles adjacents égaux.

Ppté2: Dans tout triangle, les trois bissectrices se coupent en un même point.

Démo: *Soit ABC un triangle. On trace la bissectrice issue du sommet A et du sommet B. On note I le point d'intersection. On place J le projeté orthogonal de I sur [AB], K le projeté orthogonal sur [BC] et L le projeté orthogonal sur [AC]. On sait que I est sur la bissectrice de , donc I est à équidistance de des côté de cet angle donc JI=LI. De même, on obtient IJ=IK. Donc on a IK=IL. Donc I est à équidistance des cotés de l'angle . Donc I appartient à la bissectrice de . Donc I est le point d'intersection des bissectrices.*
Figure sur geogebra

Déf: On appelle cercle inscrit d'un triangle le cercle intérieur au triangle qui est tangent au trois côtés du triangle.

Ppté2 : Le point de concours des 3 bissectrices est le centre du cercle inscrit au triangle.

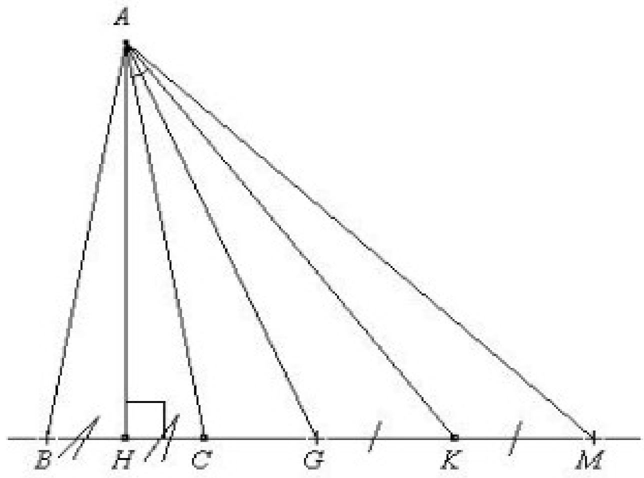
Démo: *Soit ABC un triangle. On trace la bissectrice issue du sommet A et du sommet B. On note I le point d'intersection. On place J le projeté orthogonal de I sur [AB], K le projeté orthogonal sur [BC] et L le projeté orthogonal sur [AC]. On sait que I est sur la bissectrice de , donc I est à équidistance de des côté de cet angle donc JI=LI. De même, on obtient IJ=IK. Donc on a IJ=IK=IL. Donc il existe un cercle de centre I et de rayon IJ qui contient I, J, K.*

Exercice d'application
Construire un triangle ABC tel que AB=9cm AC=11cm BC= 10cm
Placer le point M sur BC tel que BM = 6 cm
Construire les cercles inscrits dans le triangle ABM et AMC de centre respectifs I et J
Demontrer que les droites (MI) et (MJ) sont perpendiculaire.

Exercice sur les 4 thèmes niveau 4°

Exercice

Données :



- *(AH) est la médiatrice de [BC]*
- *[AG) est la bissectrice de $\widehat{CAK}$.*
- *K est le milieu de [GM]*

Que suffit-il de tracer sur la figure pour obtenir :

1. *Le centre O du cercle circonscrit à ACB ?*
2. *Le centre I du cercle inscrit dans ACK ?*
3. *Le centre de gravité J de AGM ?*
4. *L'orthocentre H de ACG ?*

V. Les droites remarquables dans des triangles particuliers

Ppté: Dans un triangle équilatéral, toutes les hauteurs, les médianes, les médiatrices et les bissectrices sont confondues.

Ppté: Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base et les médiane, hauteur, bissectrice issues du sommet opposé à la base sont confondues.

Pptés: Dans un triangle rectangle :
-les hauteurs issues des sommets extrémités de la base sont confondues avec les côtés du triangle adjacents à la base.
-le centre du cercle circonscrit est au milieu de l'hypoténuse.

VI. Exercices

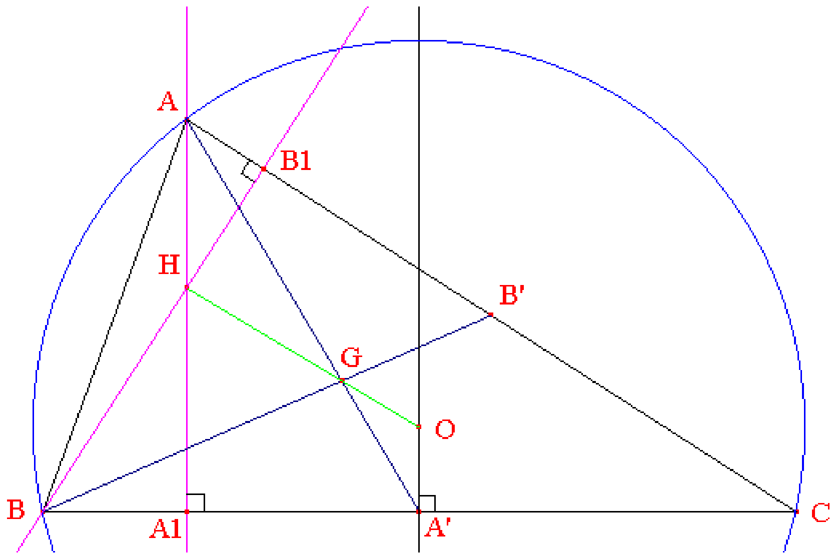
Exercice 1: La droite d'Euler

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, H le point de concours de ses hauteurs, et O le centre de son cercle circonscrit

1) Montrer que les milieux A', B', C' des côtés du triangle ABC sont les images des sommets par l'homothétie *f* de centre G de rapport -1/2.

2) Montrer que *f* transforme les hauteurs en les médiatrices des côtés.

3) Justifier que *f* transforme H en O. Retrouver maintenant la relation 1 selon laquelle ***OH*** = 3***OG*** : O, G et H sont alignés (*droite d'Euler*).



Exercice 2: Le cercle d'Euler, dit des neufs points

Dans le triangle un ABC on note A', B', C' les pieds des médianes, A1, B1, C1 les pieds des hauteurs, K, L et M les milieux de AH, BH et CH. On note W le milieu de [OH] et H' le second point d'intersection de (AH) avec le cercle (Γ). On note aussi A" l'image du point A par O la symétrie de centre O

1) Montrer que A' est le milieu de [A"H] puis que A1 est le milieu de [HH']. On retrouve ainsi que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle est situé sur le cercle circonscrit.

2) On considère maintenant l'homothétie *h* de centre H qui transforme A" en A'. Justifier que $h(O) = \Omega$ et que l'image de (Γ) par h est le cercle circonscrit au triangle A'B'C' que nous notons (γ). Le rayon de ce cercle est donc la moitié de celui de (Γ).

3) Justifier que (γ) passe par A1, B1, C1 d'une part et K, L, M d'autre part : c'est le *cercle des neuf points*.