Leçon 2 : Expérience aléatoire, probabilités, probabilités conditionnelles.

I) Expériences aléatoires, événements.

1) Expérience aléatoire.

Définition : Expérience aléatoire

On dit qu'on effectue une expérience aléatoire si on ne peut pas prévoir le résultat final de cette expérience (au contraire d'une expérience déterministe).

Exemple : 1) On lance une pièce et on observe le côté exposé (pile ou face). Il y a deux issues possibles sur cette expérience.

2) On dispose d'une urne avec 100 boules numérotées de 1 à 100, on tire l'une d'entre elles et on note le numéro. Cette expérience aléatoire a 100 issues possibles.

Définition : Univers

L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers. On note généralement cet ensemble Ω.

Remarque : Dans les cas que nous allons voir, Ω est un ensemble fini.

Exemple : On reprend les expériences de l'exemple précédent.

1) Si on lance une pièce de monnaie, on obtient $\Omega = \{P, F\}$.
2) Si on tire une boule numérotée dans une urne qui en contient 100 alors $\Omega = \{1,2,\ldots,100\}$.

2) Evénement associé à une expérience aléatoire.

Définition : Evénement élémentaire

Un événement élémentaire qu'on note ω est un sous-ensemble de l'univers Ω comportant un seul élément. Autrement dit c'est un singleton de Ω.
C'est ce qui constitue l'une des issues de la situation étudiée.

Définition : Evénement

Un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω constitué de plusieurs éléments.
C'est un ensemble de plusieurs issues.

Vocabulaire :

- L'événement «A et B » (qu'on note $A \cap B$) est l'événement constitué des issues communes aux deux événements.
- L'événement «A ou B » (qu'on note $A \cup B$) est l'événement constitué de toutes les issues des deux événements.
- Deux événements incompatibles A et B (qu'on note $A \cap B = \varnothing$) sont deux événements qui n'ont pas d'éléments en commun.
- L'événement est dit contraire de A (qu'on note $\overline{A}$) si A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A}$ forme la totalité des issues ($A \cup \overline{A} = \Omega$).

<u>Exemple :</u> Si on tire une boule dans une urne qui en contient 12 numérotées, on obtient $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

1) Obtenir un 9 est un événement élémentaire : $\omega = \{9\}$.
2) Obtenir un nombre pair est un événement : $A = \{2,4,6,8,10,12\}$.
   Obtenir un multiple de trois est un autre événement : $B = \{3, 6, 9, 12\}$.
3) $A \cap B = \{6,12\}$.
4) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.
5) Si $C = \{10, 11, 12\}$ et $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles.
6) Ici, $\overline{A}$ représente l'événement «obtenir un nombre impaire ». On a alors : - $A \cap \overline{A} = \varnothing$
   - $A \cup \overline{A} = \Omega$.

<u>**II) Probabilités.**</u>

1) Loi de probabilités sur un univers Ω.

Définition : Probabilités

Soit Ω un univers et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω (c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements associé à cette expérience aléatoire).
On appelle probabilité P toute application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1) $P(\Omega) = 1$
2) Soit $(A_i)_{i\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$ une famille d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints (si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \varnothing$) alors :

$$P\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Commentaires : On note $\mathbb{R}^+$ dans la définition, le fait que P soit à valeurs dans [0 ; 1] découle des axiomes de la définition.

Définition : Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Exemple : On se donne les probabilités d'apparition des faces d'un dé truqué :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilités $P(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	Inconnue

1) On veut calculer la probabilité d'obtenir 6. On sait que $\Omega = \cup_{i\in I}\, \omega_i$, on a donc : P probabilité $P(\Omega) = P(\underset{i\in I}{\cup}\, \omega_i) = \underset{i\in I}{\sum} P(\omega_i) = 1$, les ω_i étant disjoints deux à deux.

i.e $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Leftrightarrow P(6) = 0{,}5$.

2) Pour calculer A : « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 », on a d'après la définition : $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}3$.

2) Propriétés de calcul de probabilités.

Soient $A, B \subset \Omega$, alors :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Commentaires :

$A = (A\setminus B)\cup(A\cap B)$ (union de deux ensembles disjoints)
On peut représenter ces ensembles avec des diagrammes de Venn.
$B = (B\setminus A)\cup(B\cap A)$ si $A \subset B$ alors $B\cap A = A$.
Fomurle de Poincaré : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Cas de 3 ensembles : $P(A\cup B\cup C)= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$.

3) Equiprobabilité.

Définition : Equiprobabilité

Si tous les éléments de Ω (l'univers d'une expérience aléatoire) ont la même propriété d'apparition alors Ω est dit équiprobable.

Propriété :Si $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ est équiprobable alors : $P(\{a_i\}) = \dfrac{1}{n}$, $\forall a_i \in \Omega$.

Propriété : Si Ω est équiprobable, la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ contenant n_A éléments est : $P(A) = \underbrace{1/n + 1/n + \dots + 1/n}_{(\ n_A \text{ fois})} = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Exemple : On lance un dé (non truqué) ; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On est dans le cas d'une équiprobabilité.
La probabilité d'avoir un 5 est P(5) = 1/6 (5 est un événement élémentaire).
La probabilité d'avoir un nombre pair est P(« pair ») = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2.

III) Probabilités conditionnelles.

1) Un exemple pour commencer.

On considère une population de 500 individus parmi lesquels il y a 180 femmes et 90 des 500 individus ont l'allèle du daltonisme. On choisit un individu au hasard dans cette population (c'est une expérience aléatoire).

On note F : « l'individu choisi est une femme »
D : « l'individu choisi possède l'allèle du daltonisme ».

L'univers Ω est l'ensemble des individus, il est équiprobable. Chaque individu a la même probabilité d'être choisi, 1/500. Donc $P(D) = card(D)/Card(\Omega) = 90/500 = 0{,}18$.
Maintenant on se restreint à la sous population des femmes.
On sait que 9 possède l'allèle du daltonisme. L'univers Ω' est l'ensemble des femmes F. Il est équiprobable. Chaque femme a 1/180 chance d'être choisie. On cherche la probabilité qu'une femme choisie au hasard possède l'allèle du daltonisme : $card(D\cap F)/card(\Omega') = 9/180 = 0{,}05$.
On note cette probabilité $P_F(D) = card(D\cap F)/card(\Omega') = P(D\cap F)/P(F)$.

2) Probabilité conditionnelle.

Proposition : L'application $P_F(\cdot)$ de l'ensemble des événements ($\mathcal{P}(\Omega)$) dans [0 ; 1] telle que :

$$\begin{array}{rl} P_F : \mathcal{P}(\Omega) \to [0\,;1] & \\ A \mapsto P_F(A) = P(A\cap F)/P(F) \end{array}$$
est une probabilité.

Définition : Probabilité conditionnelle

Soit F un événement de probabilité strictement positive (c'est-à-dire $F \subset \Omega$ et $P(F) > 0$). On appelle probabilité conditionnelle à F, l'application $P_F(\cdot)$.

Commentaires : On commence par montrer que cette application est une probabilité.
Puis, on définit la probabilité conditionnelle. On peut appeler cette application ainsi, nous venons de voir que c'était bien une probabilité.

Propriété : Probabilités composées
Soit Ω un univers, F et A deux événements tels que $P(F) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$.
Alors, $P(A \cap F) = P_F(A) \times P(F) = P_A(F) \times P(A)$.

3) Formule des probabilités totales, formule de Bayes.

Définition : Partition

Soit un ensemble X quelconque. Un ensemble P de sous-ensembles de X est une partition de X si : - aucun élément de P n'est vide
- l'union des éléments de P est égale à X
- les éléments de P sont deux à deux disjoints.

Les éléments de P sont appelés les parties de la partition.

Remarque : Il ne faut pas confondre les parties avec les éléments de P.
Les parties de P sont les sous-ensembles de P, alors que les " parties de la partition P " nommées ci-dessus sont les éléments de P.

Propriété : Formule des probabilités totales
Soit $\{E_1,E_2,\dots,E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$.
Alors : $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{E_i}(A) \times P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i)$.

<u>Exemple :</u> On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 6 boules rouges et 4 boules vertes et l'urne U_2 contient 7 boules vertes et 3 boules rouges. On lance un dé. S'il indique le chiffre 1, on choisit l'urne U_1 sinon on choisit l'urne U_2. On effectue ensuite deux tirages avec remise. On cherche la probabilité d'avoir tiré deux rouges en tout. On note : R = {rouge au 1er tirage} , R' = {rouge au 2e tirage}.

H_1 = {choix de l'urne U_1} , $H_2 = H_1^C$ = {choix de l'urne U_2} .

On a ainsi : $P_{H_1}(R) = 6/10 = 3/5$. $P_{H_1}(R\cap R') = (3/5)^2$.
$P_{H_2}(R) = 3/10$. $P_{H_2}(R\cap R') = (3/10)^2$.

La formule des probabilités conditionnelles donne : $P(R) = P_{H_1}(R).P(H_1) + P_{H_2}(R).P(H_2)$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20}.$$

et $P(R\cap R') = P_{H_1}(R\cap R') \times P(H_1) + P_{H_2}(R\cap R') \times P(H_2) = (3/5)^2\times(1/6) + (3/10)^2\times(5/6)$
$= 27/200$.

Propriété : Formule de Bayes
Soit $\{E_1,E_2, \dots ,E_n\}$ une partition de Ω d'événements non vides. Soit $A \subset \Omega$.
Alors : $P_A(E_i) = \dfrac{P_{E_i}(A) \times P(E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P_{E_j}(A) \times P(E_j)}$.

<u>Exemple :</u> Un test sanguin a une probabilité de 0,95 de détecter un certain virus lorsque celui-ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. On cherche la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle est positif (et on sait que 0,5% de la population est porteuse du virus).

On note : V = {la personne testée a le virus} ; T = {la personne testée a un test positif}.

On cherche $P_T(V)$. Or, on sait que : $P(V) = 0{,}005$; $P_V(T) = 0{,}95$; $P_{V^c}(T) = 0{,}01$.

On en déduit par la formule de Bayes :

$$P_T(V) = \frac{P(T\cap V)}{P(T)} = \frac{P_V(T).P(V)}{P_V(T).P(V) + P_{V^c}(T).P(V^C)} = \frac{0{,}95 \times 0{,}005}{0{,}95\times 0{,}005 + 0{,}01\times 0{,}995} \simeq 0{,}323.$$

4) Indépendance de deux événements.

Définition : Indépendance de deux événements
Deux événements A et B sont dits indépendants si : $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$.

Commentaires : Si A et B sont indépendants, on a : $P(A \cap B^C) = P(A) \times P(B^C)$.

Propriété : Si $P(F) > 0$, on a : $P(E) = P_F(E)$.

Remarque : Ce résultat correspond à l'idée intuitive que si E et F sont indépendants alors la réalisation de F n'apporte pas d'information sur E.

Exemple : On jette deux fois le même dé.
Les événements A = {obtention d'un chiffre pair au premier lancer},
B = {obtention du 1 au deuxième lancer},
sont indépendants. En effet, en prenant $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et si on fait l'hypothèse de l'équiprobabilité dans Ω (P équiprobable), on vérifie que :

$P(A) = 18/36 = 1/2$. $P(B) = 6/36 = 1/6$.
$P(A\cap B) = 3/36 = 1/12$. $P(A) \times P(B) = 1/2 \times 1/6 = 1/12$.