Leçon 36: Problèmes de constructions géométriques

1. Introduction et éléments de vocabulaire

2. Le cercle et la carte au trésor

3. Construction d'une racine à la règle et au compas

4. Déterminer le centre d'un cercle

5. Un dodécagone régulier

6. Résolution géométrique de toute équation du 2nd degré

Remarques :

1. les solutions proposées dans le texte n’apparaîtront pas dans l'exposé, elles sont là pour aider le lecteur.

2. Ici est proposé un plan dont la ligne directrice est le niveau de classe auquel se situe l'exercice. On aurait pu proposé un plan autour des instruments autorisés dans l'exercice (tout instrument, la règle non gradué et le compas, le compas seul, ...)

1. Introduction et éléments de vocabulaire

1.1 Le thème

Un des quatre thèmes majeurs du collège.
Un des trois thèmes majeurs du lycée.
Mais depuis 2009 programmes de géométrie fortement allégé au lycée.
Une orientation vers de la géométrie analytique.

1.2 Niveaux concernés

Principalement collège

1.3 Définitions

Définition : *Programme de construction :*
Un programme de construction est un texte qui permet d'établir une figure géométrique. On retrouve ce programme de construction au début d'un exercice de géométrie de collège ou de lycée.

Dans cette leçon, on présente quelques programmes de construction pouvant être vus au collège. On donnera suivant les cas une démonstration et/ou une construction effectuée sur le logiciel Geogebra.

2. Le cercle et la carte au trésor

1.1 Énoncé

Un chercheur de trésor a acheté la carte d'une île sur laquelle sont notés plusieurs emplacements. Un point P correspond à l'emplacement du Port, un point C au correspond au point Culminant de l'île, et enfin un point T indique l'emplacement de la tour de garde.
Cette carte est accompagnée des indications suivantes : Un trésor est situé à 4km de la tours et à 6km du point le plus haut de l'île. Il faudra moins de 8km de marche depuis le port pour y accéder.

Aidez le chercheur à déterminer l'emplacement du trésor sur la carte

1.2 Notions vues et niveaux concernés

Définition du cercle.
Début 6ème.

1.3 Intérêt du sujet

Prise d'initiative.
Utilisation possible des TICE

3.Construction d'une racine à la règle et au compas

1.1 Énoncé

On dispose d'un segment [AB] de longueur 1cm, et on cherche à tracer à la règle et au compas un segment dont la longueur mesure très précisément $\sqrt{(15)}$ cm

1.2 Notions vues et niveaux concernés

Notions de trigonométrie
Egalité de Pythagore
Propriété des triangles rectangle dans un cercle
Notion de racine carré
Notion de tangente à un cercle.
Identité remarquable.
Classe de troisième ou seconde suivant les méthodes.

1.3 Intérêt du sujet

Plusieurs méthodes possibles
Demande une grande prise d'initiative de la part des élèves
Un large panel de notions réinvestis.
Une construction non évidente, et pourtant une justification assez accessible.

1.4 Solution

Méthode 1 : Construire le point C tels que ce point appartiennent à [AB) et AC=15cm. Placer le point O=m[AC] par exemple en traçant la médiatrice de [AC] a la règle et au compas. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA.

Tracer la perpendiculaire à [AC] passant par B. Cette perpendiculaire coupe $\mathcal{C}$ en deux points. Nommer un de ces points D. [AD] mesure $\sqrt{(15)}$ cm.

Justification : ABD est un triangle rectangle en B car par construction (AB) est perpendiculaire à (BD).
Cos DÂB = AB/AD = 1/AD

ACD est un triangle rectangle en D, car D appartient au cercle de diamètre [AC].
Cos DÂC = AD/AC = AD/15

Or B appartient à [AC] donc DÂB = DÂC
Donc 1/AD = AD/15
C'est à dire $AD^2 = 15$
Et ainsi AD = $\sqrt{(15)}$ cm.

Méthode 2 : On trace ABC un triangle rectangle isocèle en A. D'après l'égalité de Pythagore CB = $\sqrt{(2)}$ cm.

On trace un triangle BCD rectangle en B tels que BD = 2cm. D'après l'égalité de Pythagore CD = $\sqrt{(2+2^2)}=\sqrt{(6)}$ cm.

On trace un triangle CDE rectangle en D tels que DE = 3cm. D'après l'égalité de Pythagore CE = $\sqrt{(6+3^2)}=\sqrt{(15)}$ cm.

Méthode 3 : (Niveau seconde) Construire le point P tels que ce point appartiennent à (AB] et AD=3cm.Placer le point O=m[AB] par exemple en traçant la médiatrice de [AC] a la règle et au compas. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OA.

Tracer une des deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant par P. Nommer le point tangent C . Pour cela on peut tracer le cercle $\mathcal{C}$' de centre P et de rayon OP.

Le segment [PC] mesure $\sqrt{(15)}$ cm.

Justification : (PC) est tangente en C au cercle $\mathcal{C}$ donc (PC) et (CO) sont perpendiculaire. Le triangle PCO est donc rectangle en C.

On pose PO = x et AO = r. D'après l'égalité de Pythagore :
$PO^2 = PC^2 + CO^2$
$PC^2 = x^2 - r^2$

Par ailleurs PA * PB = (PO – AO)(PO + OB)

$PA * PB = (x - r)(x + r)$
Identité remarquable : $PA * PB = x^2 - r^2$

Ainsi $PC^2 = PA * PB$
$PC^2 = 3 * 5$
$PC^2 = 15$
$PC = \sqrt{(15)}$ cm.

4.Déterminer le centre d'un cercle

1.1 Énoncé

A partir d'un cercle donné, construire le centre de ce cercle et justifier sa construction .

1) A la règle et au compas
2) Au compas uniquement

1.2 Notions vues et niveaux concernés

Question 1)
Définitions et propriété du cercle.
Définition et construction de la médiatrice d'un segment a la règle et au compas.
Classe de sixième

Question 2)
Notions de trigonométrie
Classe de troisième

1.3 Intérêt du sujet

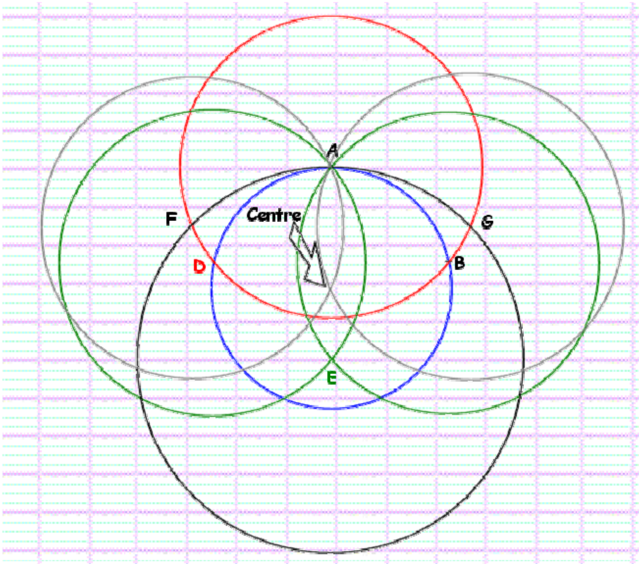
Une difficulté et un niveau de classe différent suivant les contraintes instrumentales imposé.
Un énoncé très simple et cours, et pourtant un exercice de géométrie instrumenté non trivial.

1.4 Solution

Question 1) On place trois points A, B et C sur le cercle. On trace les médiatrices des segments [AB] et [BC]. Le point d'intersection de ces deux médiatrice est le centre O du cercle. C'est en effet le seul point à égal distance des trois points A, B et C du cercle .

Question 2)

- Choisir, sur le cercle (C), deux points A et B non diamétralement opposés
- Tracer le cercle (C_1) de centre A qui passe par B. Ce cercle (C_1) coupe le cercle (C) en B et en un autre point que nous appellerons D
- Tracer le cercle de centre B passant par A et le cercle de centre D passant par A. Ces deux cercles sont sécants en A et un point appelé E.
- Tracer le cercle (C_4) de centre E et passant par A . Ce cercle coupe le cercle (C_1) en deux points F et G.
- Tracer enfin le cercle de centre F passant par A et le cercle de centre G passant par A. Ces deux cercles sont sécants en deux points : le point A et un point O qui est … le centre du cercle initial (C).



Petite note historique : ce problème s'appelle le problème de Napoléon.
C'est lors de la campagne d'Italie (1797) que Napoléon rencontra le mathématicien Mascheroni, spécialiste de la géométrie du compas qui démontrait dans son livre « la géométrie du compas » que « Tout ce qui peut être construit avec la règle et le compas peut l'être avec le seul compas. »
De retour en France, Napoléon exposa à l'Académie des Sciences les résultats de ce mathématicien ainsi que ce problème dont il donna une solution « personnelle ».
David Hilbert (1862-1943) apporta une précision à propos de la construction du centre d'un cercle : "On ne peut pas construire le centre d'un cercle à la règle uniquement".

Une justification mathématique possible de la construction : (d'après Napoléon (avec l'aide de Mascheroni sûrement).
Soit r, r_1 et r_4 les rayons des cercles (C) (en bleu), (C_1) (en rouge) et (C_4) (en noir).
ABED est un losange de longueur de côté r_1. En effet :

- DA = AB car B et D sont sur (C_1)
- BA = BE car A et E sont sur le cercle de center B passant par A
- DA = DE car A et E sont sur le cercle de centre D passant par A.

La droite (AE), médiatrice de [BD], contient le centre du cercle (C) mais aussi le milieu H du losange et A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C).
Dans le cercle (C), $\widehat{ABD}$ et $\widehat{AA'D}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc

$\tilde{AD}$ et sont donc égaux. Donc $\widehat{ABH} = \widehat{AA'D}$

- Dans le triangle AHB rectangle en H, $\sin(\widehat{HBA}) = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{AE}{2}}{AB} = \frac{AE}{2r_1}$
- Dans le triangle AA'D rectangle en D, $\sin(\widehat{AA'D}) = \frac{AD}{AA'} = \frac{r_1}{2r}$

Donc $\frac{AE}{2r_1} = \frac{r_1}{2r}$. Soit $r_4 = DA = \frac{r_1^2}{r}$.

De la même façon avec le cercle (C_4) et les points A, F, G et O, on trouve que $OA = \frac{r_1^2}{r_4}$.

D'où, $OA = \frac{r_1^2}{\frac{r_1^2}{r}}$. C'est à dire : $OA = r$. Le point O est donc le centre du cercle (C).

5.Un dodécagone régulier

1.1 Énoncé

Le but de cet exercice est de faire émerger une technique permettant de tracer un dodécagone régulier avec une règle et un compas.

1. Tracer le cercle *C* de centre *O* et de rayon *OA* = 1.
2. Tracer un triangle équilatéral *OIA*.
3. Tracer la bissectrice de l'angle IÔ*A*, elle coupe le cercle *C* en un point *B*.
4. Tracer la perpendiculaire de (*OI*) passant par *A*. Elle coupe le cercle *C* en 2 points *J et J'*.
5. Tracer *A'*, *B'*, *i'* les points symétriques de *A*, *B* et *I* (respectivement) par rapport à la droite (*JJ'*).
6. Tracer *A''*, *B''* les points symétriques de *A*, *B* et *J* par rapport à *O*.
7. Tracer *A'''*, *B'''* les points symétriques de *A* et *B* par rapport à (*OI*).
En reliant par des lignes droites, les points *I*, *B*, *A*, *J*, *A'*, *B'*, *I'*, *B''*, *A''*, *J'*, *A'''*, *B'''*, on obtient un dodécagone régulier.

1.2 Notions vues et niveaux concernés

Utilisation avancé de géogébra (tracer un cercle ; tracer un polygone ; tracer une bissectrice ; tracer une droite perpendiculaire ; utiliser la symétrie axiale et centrale)

Notions avancées de polygone régulier

Classe de troisième minimum (le dodécagone n'est pas un des polynôme dont la construction est proposée dans les programmes de troisième. On se limite à l'octogone)

1.3 Intérêt du sujet

Utilisation des TICE avancé.
Construction d'une figure géométrique assez complexe
Beaucoup de vocabulaire de géométrie réutilisé et de notions revues.

Remarque *: Cet exercice est à la limite du sujet car il n'y a pas vraiment de problèmes de construction mais plutôt un programme de construction.*

1.4 Solution

Voir document géogébra

6.Résolution géométrique de toute équation du 2nd degré

1.1 Énoncé

On peut supposer que $a>0$, (car on peut toujours se ramener à ceci en modifiant tous les signes des coefficients a, b et c).

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal, on place les points I, A, B et C définis par :
$\vec{i} = \overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{IA} = a\,\vec{i}$; $\overrightarrow{AB} = b\,\vec{j}$; $\overrightarrow{BC} = -c\,\vec{i}$.
Les coordonnées des points sont alors : $I(1;0)$; $A(1+a;0)$; $B(1+a;b)$; C $(1+a-c;b)$.

A tout point P situé sur l'axe des ordonnées, de coordonnées $P(0;p)$, on associe un point N situé sur la droite (BC) construit de la façon suivante :

La droite (PI) coupe (AB) en un point M. La perpendiculaire en M à (PM) coupe (BC) en N.

1. Déterminer les coordonnées de M et N.
2. Montrer que les points C et N sont confondus si et seulement si $ap^2+bp+c=0$.
3. Applications : résoudre graphiquement :
   a) $2x^2-x-6=0$
   b) $4x^2-3x+3=0$
   c) $9x^2-12x+4=0$

1.2 Notions vues et niveaux concernés

Notions d'équation du second degré.
Notions de géométrie vectoriel.
Représentation graphique de fonction.
Classe de 1ère

1.3 Intérêt du sujet

Aborder la un problème de géométrie analytique qui fait apparaître des notions de constructions géométriques.
Permet de se positionner sur les programmes de lycée.