Géométrie : Introduction

Dans cette partie du cours de préparation, « Géométrie » signifie « Géométrie élémentaire ». C'est la partie des mathématiques dont la première mise en forme remonte aux travaux d'Euclide, et qui est classiquement présente dans les programmes officiels des classes de Collège et de Lycée. Cette Géométrie pose un problème particulier dans le cursus d'un étudiant préparant le CAPES (ou l'Agrégation) que l'on va s'efforcer de préciser.

La Géométrie est susceptible de deux types de présentation. Une présentation souvent qualifiée d'axiomatique, comme dans les travaux d'Euclide et de Hilbert (entre autres) et une présentation qui sera ici appelée algébrique qui s'appuie sur les propriétés de l'ensemble des nombres réels et sur la structure d'espace vectoriel réel.

Jusqu'ici, il n'y a rien qui distingue la Géométrie d'autres branches des mathématiques qui, elles aussi, peuvent être présentées de plusieurs façons. Ce qui rend le statut de la Géométrie particulier, c'est que l'enseignement secondaire - auquel se destine, a priori, les étudiants qui préparent le CAPES - privilégie, sans le dire, une présentation de type axiomatique, alors que la formation universitaire, sauf exception, privilégie elle une présentation algébrique. Ainsi, un professeur de Collège et de Lycée, fraîchement formé, devra enseigner des notions géométriques (angles, distances, etc.) en ayant présent à l'esprit - dans le meilleur des cas - des définitions et des justifications qui s'appuient sur des notions absentes des programmes officiels et *en ignorant* les définitions et justifications qui, à défaut d'être présentes dans les programmes, sont compatibles avec eux (et parfois d'ailleurs sous-entendues par eux).

Donnons un exemple. Il est bien classique, dès le Collège, que les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Pour le montrer, il est d'usage de "partir" du point d'intersection de deux des médianes et de justifier que ce point appartient à la troisième médiane. Mais au fait, pourquoi deux médianes se coupent-elles ? Cet aspect du problème est, soit absent du travail mathématique abordé au Collège, soit limité à un argument visuel tant la propriété d'intersection de deux médianes est « évidente ». Mais, comment un étudiant peut-il réagir devant un jury qui lui demande de justifier que deux médianes se coupent ?

S'il n'a à sa disposition que l'outil algébrique et s'il ne veut pas utiliser la connaissance de l'outil barycentrique (qu'il sait postérieur dans la construction des savoirs géométriques, au résultat sur les médianes) il peut, par exemple, se placer dans un repère affine bien choisi et écrire les équations de deux médianes. En résolvant le sytème de deux équations linéaires obtenues, il vérifiera que les deux droites sont sécantes.
S'il connaît une présentation axiomatique, il pourra invoquer l'axiome de Pasch qui affirme (sur la base de l'évidence pratique, c'est elle le plus souvent qui justifie le choix des axiomes) que toute droite qui entre dans un triangle (par un point autre que l'un de ses sommets) ... en ressort ! On remarquera que ce type de justification est beaucoup plus

proche, dans son esprit, de la démarche d'évidence visuelle utilisée au Collège. Il serait légitime que ce soit l'argument mobilisé par l'étudiant interrogé.

Pour vous permettre de vous initier à la démarche axiomatique, voici les axiomes de la Géométrie euclidienne plane retenus par Greenberg [1].

Les axiomes sont classiquement rangés en quatre groupes. Ils sont relatifs à deux ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$; les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés les *points* et les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés les *droites*. Dans une présentation axiomatique complète de la Géométrie (plane), il faut ajouter aux axiomes un certain nombre de définitions. On ne le fera pas ici car il s'agit de donner une idée (précise tout de même) d'une construction axiomatique de la Géométrie, mais pas d'en proposer une construction complète.

1. Axiomes d'Incidence

I1 : Étant donné deux points P et Q distincts, il existe une unique droite contenant (passant par) P et Q.

I2 : Étant donné une droite, il existe au moins deux points sur cette droite.

I3 : Il existe trois points non alignés (i.e. n'appartenant pas à une même droite).

Remarques :

- Lorsqu'une droite passe par un point, on dit qu'elle est incidente à ce point ;
- L'unique droite incidente aux deux points distincts P et Q, est notée (PQ).

2. Axiomes d'Ordre

Il existe une relation ternaire définie sur $\mathcal{P}$, notée $*$ et nommée « entre » qui possède les propriétés suivantes.

O1 : Si trois points A, B, C sont tels que B est entre A et C, i.e. $A * B * C$ alors A, B, C appartiennent à une même droite (on dit qu'ils sont alignés), ils sont distincts deux à deux et $C * B * A$.

O2 : Étant donné deux points distincts B et D, il existe trois points A, C, E appartenant à (BD) tels que $A * B * D$, $B * C * D$ et $B * D * E$. (Faites un dessin)

O3 : Si A, B, C sont trois points distincts deux à deux, appartenant à une même droite, alors un, et un seul, de ces trois points est entre les deux autres.(Comparer avec ce qui se passe pour trois points situés sur un même cercle).

Définition : Une droite d étant donnée, deux points A et B n'appartenant pas à d sont dits *du même côté de* d si le segment $[AB]$ n'a aucun point commun avec d. Dans le cas contraire, les points A et B sont dits *de part et d'autre de* d.

O4 : Pour toute droite d, et tout triplet A, B, C de points n'appartenant pas à d :

- Si A et B sont d'un même côté de d et si B et C le sont aussi, alors A et C sont d'un même côté de d ;

[1]Greenberg Marvin J., 1972, *Euclidean and non-euclidean geometries, development and history*, Freeman, San Francisco

– Si A et B sont de part et d'autre de d et si B et C le sont aussi, alors A et C sont d'un même côté de d.

Remarque : à partir des axiomes O1, O2 et O3, il est possible de définir un segment. Avec les quatre axiomes d'ordre, on peut définir une demi-droite, puis un angle (géométrique, i.e. non orienté). De tels objets géométriques seront utilisés dans la suite avec les notations usuelles.

3. Axiomes de Congruence

Il existe une relation binaire définie sur l'ensemble des segments, et une relation binaire définie sur l'ensemble des angles, toutes les deux notées $\equiv$ et nommées « congruence » qui vérifient les propriétés suivantes.

C1 : Si $A \neq B$ et A' un point quelconque, pour toute demi-droite d'origine A', notée $d_{A'}$, il existe un unique point $B' \in d_{A'}$, tel que $[AB] \equiv [A'B']$ (on lit « $[AB]$ congru à $[A'B']$ »).

C2 : Si $[AB] \equiv [CD]$ et $[AB] \equiv [EF]$, alors $[CD] \equiv [EF]$. De plus, tout segment est congru à lui-même.

C3 : Si $A * B * C$ et $A' * B' * C'$, si $[AB] \equiv [A'B']$ et $[BC] \equiv [B'C']$, alors $[AC] \equiv [A'C']$.

C4 : Étant donné

- un angle $\widehat{BAC}$ tel que les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ ne sont pas opposées ;
- une demi-droite [A'B') ayant pour origine un point quelconque A',

il existe une unique demi-droite $[A'C')$ - qui soit d'un côté donné de (AB) - telle que $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$.

C5 : Si $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ et $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$, alors $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. De plus, tout angle est congru à lui-même.

Définition : On dit que deux triangles sont congruents si leurs trois côtés sont deux à deux congruents et si les angles « compris » entre des côtés congruents le sont aussi.

C6 : Si deux triangles sont tels

- qu'un angle du premier, $\hat{\alpha}$, est congruent à un angle du second $\widehat{\alpha'}$;
- les côtés de $\hat{\alpha}$ sont congruents aux côtés de $\widehat{\alpha'}$,

alors les deux triangles sont congruents.

4. Axiomes de Continuité

Axiome d'Archimède

Soit $[AB]$ et $[CD]$ deux segments, il existe un entier naturel n, tel que si l'on reporte le segment $[CD]$ n fois sur la demi-droite $[AB)$, on atteint un point, noté E, tel que $A * B * E$.

Remarque : l'opération de report à laquelle il est fait allusion dans l'énoncé précédent est légitimée par l'axiome C1, où l'on a pris $A' = A$, $[AB] = [CD]$ et déterminé successivement B_1 tel que $[AB_1] \equiv [CD]$, puis B_2 tel que $[B_1B_2] \equiv [CD]$ avec $A * B_1 * B_2$, etc.

Axiome de Dedekind

Soit d une droite. Si d est la réunion de deux parties non vides, A et A', telles qu'aucun point de A ne soit situé entre deux points de A' et qu'aucun point de A' ne soit situé entre deux points de A, alors il existe un unique point, noté O, appartenant à d, tel que pour tous points $P, Q \in d, P \neq O, Q \neq O$, $P * O * Q \Leftrightarrow (P \in A, Q \in A')$ ou $(P \in A', Q \in A)$.

L'axiome de Dedekind assure qu'il n'existe pas de « trou » dans les droites.

5. Axiome des parallèles

Soit d une droite et M un point n'appartenant pas à d. Il existe une, et une seule, droite passant par M et parallèle à d.
En utilisant la définition classique :
Définition : Deux droites sont dites parallèles si elles n'ont aucun point commun.

Remarques :
- L'axiome des parallèles (axiome d'Euclide) peut être supprimé, on obtient alors une définition de la Géométrie dite *neutre* ou *absolue*.
- D'autres listes d'axiomes permettent de définir d'autres Géométries : Géométrie hyperbolique, elliptique, projective, affine, etc.
- Il est parfaitement possible de définir la même Géométrie à partir de listes d'axiomes différentes. Par exemple, l'axiome d'Euclide (dont l'énoncé retenu ici n'est pas celui qui a été donné par Euclide) peut être remplacé par « Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre. ».

À titre de comparaison et pour illustrer de façon radicale les deux types de présentation de la Géométrie, voici comment définir la Géométrie plane euclidienne de façon algébrique.

Définition : Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel réel de dimension 2 et E un ensemble. On dit que $(E, \overrightarrow{E}, \varphi)$ est un plan euclidien si
- Le groupe additif $(\overrightarrow{E}, +)$ opère transitivement et simplement (on dit aussi librement) sur l'ensemble E ;
- φ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive, définie sur $\overrightarrow{E}$.

Remarque : La disproportion entre les volumes d'écriture nécessaires aux deux présentations ne doit pas faire oublier qu'il faut avoir donné un sens précis à tous les mots utilisés dans la définition algébrique ... et avoir les propriétés de l'ensemble des réels à disposition !

La juxtaposition des deux approches fait mieux comprendre la difficulté singulière de la formation à l'enseignement de la Géométrie au Collège et au Lycée. Il apparaît clairement que l'exposition exhaustive de l'une quelconque des deux présentations est inabordable dans l'enseignement secondaire et les élèves devront donc faire de la Géométrie euclidienne plane (et dans l'espace, un peu aussi) sans que les fondements de celle-ci ne soient vraiment explicités. Les enseignants devront apprendre aux élèves à pratiquer cette Géométrie sans avoir eux-mêmes complètement approfondi ces fondements, ce ne sera pas toujours facile.

Quant aux étudiants préparant le CAPES, ils devront suffisament approfondir ces fameux fondements pour faire face aux questions des jurys, tout en gardant à l'esprit que ces jurys attendent aussi (surtout !) d'eux qu'ils sachent mettrent en oeuvre des connaissances géométriques pour résoudre des problèmes.