Leçon 64 : Courbes de Bézier

Cadre : BTS

Pré requis :
- Etudes de courbes paramétrées
- Barycentres dans le plan

Les courbes de Bézier sont inscrites dans les modules du programme des BTS : modélisation géométrique 1 et 2.

Qu'est-ce que la modélisation géométrique?
La modélisation est l'ensemble des outils mathématiques, numériques et informatiques qui, combinés, permettent de construire un modèle virtuel d'une forme existante ou à créer. Elle permet d'élaborer virtuellement et de visualiser un objet, une trajectoire, la forme d'une lettre d'imprimerie... avec des courbures ou des contraintes précises.

A quoi cela sert-il?
La modélisation géométrique est utilisée dans de nombreux domaines industriels. Elle permet par exemple de réduire l'usure et les contraintes en lissant les à-coups entre les pièces mécaniques en mouvement. Elle permet aussi, dans le traitement d'images, d'améliorer les contours en évitant toute variation brutale du signal en cours de traitement.

Pierre Bézier (1910-1999) était un ingénieur chez Renault qui, à l'aide de son modèle, a modélisé des carrosseries d'automobiles.
Les courbes de Bézier sont utilisées en particulier dans l'industrie automobile et dans l'aéronautique pour modéliser un objet existant ou à créer et mettent véritablement en jeu plusieurs aspects et notions mathématiques. Ce modèle est notamment à la base de la réalisation des courbes et des surfaces en CAO et CFAO (Conception et fabrication assistées par ordinateur).

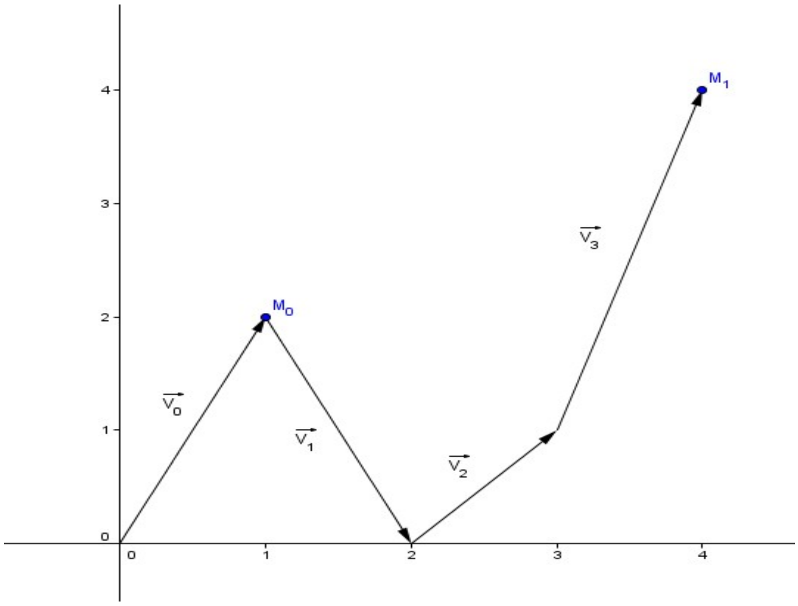
Les courbes de Bézier constituent un véritable "carrefour" de plusieurs domaines des mathématiques et elles seront présentées successivement de trois façons pour souligner comment différentes approches peuvent conduire au même modèle mathématique dont les propriétés peuvent être introduites dans le cadre le plus adapté.

1. Présentation par vecteurs et contraintes

1.1 Présentation générale du problème

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, soit M_0 et M_1 deux points du plan muni fixés, constituant les extrémités de l'arc de courbe que l'on veut réaliser.

Il s'agit de tracer l'arc de courbe M_0M_1 défini par des vecteurs et des contraintes, c'est-à-dire lorsque sont donnés des vecteurs de contraintes imposées à la courbe.



Etudions deux cas particuliers : lorsque quatre vecteurs sont donnés en contraintes et lorsque trois vecteurs contraintes sont donnés.

1.2. Quatre vecteurs contraintes

Dans cette présentation des courbes de Bézier par vecteurs et contraintes, on définit l'arc de courbe M_0M_1 par une représentation paramétrique de la forme suivante (t appartient à $[0\,;1]$) :

$$\vec{OM}(t)=\vec{V}_0+f_1(t)\vec{V}_1+f_2(t)\vec{V}_2+f_3(t)\vec{V}_3$$

où le paramètre réel t varie dans l'intervalle [0,1] avec pour $t=0$, $M(0)=M_0$ et, pour $t=1$, $M(1)=M_1$.

Les quatres vecteurs $\vec{V}_i$, où $0\leq i\leq 3$, et les trois fonctions f_i , où $1\leq i\leq 3$, vont être précisés en tenant compte de diverses contraintes, sachant que les fonctions f_i sont des fonctions polynômes du troisième degré et que les vecteurs $\vec{V}_i$, ne dépendent pas du paramètre t .

Cette indépendance des vecteurs $\vec{V}_i$, par rapport à t, permet d'obtenir par dérivations successives :

$$\frac{d\,\vec{OM}}{dt}(t)=f_1'(t)\vec{V}_1+f_2'(t)\vec{V}_2+f_3'(t)\vec{V}_3\ ,$$

$$\frac{d^2\,\vec{OM}}{dt^2}(t)=f_1''(t)\vec{V}_1+f_2''(t)\vec{V}_2+f_3''(t)\vec{V}_3\ .$$

C'est le choix du nombre $n+1=4$ de vecteurs $\vec{V}_i$, donc du degré n = 3 des fonctions f_i, qui constitue ce cas particulier.

Contraintes de position

On impose les deux contraintes suivantes :

$\vec{OM}_0=\vec{OM}(0)=\vec{V}_0$ et $\vec{OM}_1=\vec{OM}(1)=\vec{V}_0+\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3$.

Elles laissent donc libre le choix de deux des trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$: ainsi par exemple, on peut choisir $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$; $\vec{V}_3$ est alors fixé par $\vec{V}_3=\vec{OM}_1-\vec{V}_0-\vec{V}_1-\vec{V}_2$.

En pratique, on va choisir $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_3$ afin qu'ils satisfassent de nouvelles contraintes et $\vec{V}_2$ est défini par :

$$\vec{V}_2=\vec{OM}_1-\vec{V}_0-\vec{V}_1-\vec{V}_3\ .$$

Contraintes de tangence

On impose les deux contraintes suivantes :

le vecteur $\vec{V}_1$ est un vecteur directeur de la tangente en M_0 à l'arc de la courbe M_0M_1 et de même pour $\vec{V}_3$ en M_1.

Ces deux contraintes se traduisent plus précisément par les relations :

$$\frac{d\,\vec{OM}}{dt}(0)=f'_1(0)\vec{V}_1 \text{ et } \frac{d\,\vec{OM}}{dt}(1)=f'_3(1)\vec{V}_3\ .$$

Contraintes de concavité

On admettra que deux contraintes précisant l'allure de l'arc de la courbe au voisinage de chacun des deux points M_0 et M_1 se traduisent par les relations :

$$\frac{d^2\,\vec{OM}}{dt^2}(0)=f''_1(0)\vec{V}_1+f''_2(0)\vec{V}_2\ ,$$

$$\frac{d^2\,\vec{OM}}{dt^2}(1)=f''_2(1)\vec{V}_2+f''_3(1)\vec{V}_3\ .$$

Traduction de ces contraintes

Pour déterminer les coefficients des trois polynômes du troisième degré f_1, f_2 et f_3, on a à résoudre un système de 12 équations à 12 inconnues... Avec de la patience, on obtiendrait :

$$\begin{cases} f_1(t) & = & t^3-3t^2+3t \\ f_2(t) & = & -2t^3+3t^2 \\ f_3(t) & = & t^3 \end{cases}\ .$$

Définition :
La courbe définie pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$\vec{OM}(t)=\vec{V}_0+(t^3-3t^2+3t)\vec{V}_1+(-2t^3+3t^2)\vec{V}_2+t^3\vec{V}_3$$

est appelée la courbe de Bézier associée aux quatre vecteurs contraintes $\vec{V}_i$.

D'après ce qui précède, cette courbe satisfait l'ensemble des contraintes énoncées ci-dessus.

Remarque **:**
En développant l'expression de $\vec{OM}(t)$ et en regroupant différemment les vecteurs, $\vec{OM}(t)$ peut aussi s'écrire : $\vec{OM}(t)=t^3(\vec{V}_1-2\vec{V}_2+\vec{V}_3)+t^2(-3\vec{V}_1+3\vec{V}_2)+t(3\vec{V}_1)+\vec{V}_0$.

Exercice :
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on donne les deux points $M_0(1\,;3)$ et $M_1(4\,;4)$, et les vecteurs $\vec{V}_1(1\,;-2)$ et $\vec{V}_3(1\,;2)$. Déterminer les vecteurs $\vec{V}_0$ et $\vec{V}_2$. Etudier la courbe de Bézier d'extrémités M_0 et M_1 , associée aux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_3$, et tracer cette courbe.

Résolution :
On a $\vec{V}_0=\vec{OM}_0$ et $\vec{V}_2=\vec{OM}_1-\vec{V}_0-\vec{V}_1-\vec{V}_3$, d'où $\vec{V}_0(1\,;3)$ et $\vec{V}_2(1\,;1)$.
Par définition, la courbe de Bézier associée à ces vecteurs a pour représentation paramétrique, avec $t\in[0\,;1]$: $\vec{OM}(t)=t^3(\vec{V}_1-2\vec{V}_2+\vec{V}_3)+t^2(-3\vec{V}_1+3\vec{V}_2)+t(3\vec{V}_1)+\vec{V}_0$.

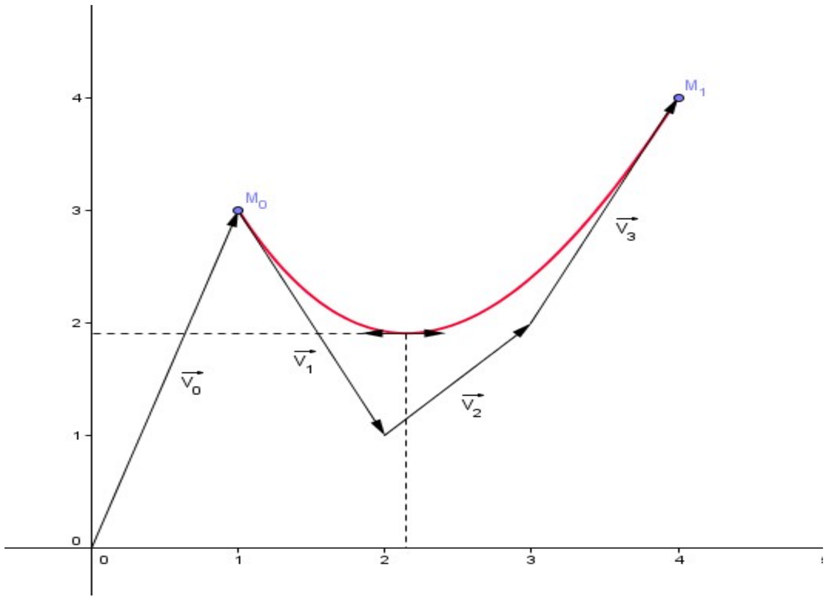
Les coordonnées du point $M(t)$ sont donc : $\begin{cases} x(t) &=& 1+3t \\ y(t) &=& -2t^3+9t^2-6t+3 \end{cases}$

Etudions les fonctions x et y : $x'(t)=3$ et $y'(t)=-6t^2+18t+3$.

y' s'annule pour $t=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}>1$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}38$.

On en déduit le tableau de variations conjoints de x et y et la courbe.

t	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	1
$x'(t)$	+		+
$x(t)$	1 ↗		4
$y(t)$	3 ↘	~ 1,9	↗ 4
$y'(t)$	-	0	+



1.3. Trois vecteurs contraintes

Si ce cas particulier ressemble à celui présenté au paragraphe précédent, il diffère sur le nombre de vecteurs contraintes que l'on se donne, c'est-à-dire trois, que l'on nommera $\vec{V}_0, \vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. En effet, le processus industriel est parfois trop complexe ou coûteux avec quatre vecteurs contraintes, on diminue alors les contraintes pour faciliter le procédé.

Pour $t \in [0\,;1]$, soit le vecteur $\vec{OM}(t)$ défini par :

$$\vec{OM}(t) = \vec{V}_0 + f_1(t)\vec{V}_1 + f_2(t)\vec{V}_2\,,$$

$$\frac{d\,\vec{OM}}{dt}(t) = f'_1(t)\vec{V}_1 + f'_2(t)\vec{V}_2\,.$$

Avec les $f_i(1 \leqslant i \leqslant 2)$ qui sont des polynômes de degré 2 de la variable réelle t :

$$\begin{cases} f_1(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ f_2(t) &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'_1(t) &= 2a_1 t + b_1 \\ f'_2(t) &= 2a_2 t + b_2 \end{cases}$$

Les contraintes de position et de tangence s'écrivent :

$$\vec{OM}(0) = \vec{V}_0 \qquad \text{et} \qquad \vec{OM}(1) = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\frac{d\,\vec{OM}}{dt}(0) = f'_1(0)\vec{V}_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\,\vec{OM}}{dt}(1) = f'_2(1)\vec{V}_2$$

Pour déterminer les coefficients des deux polynômes du second degré f_1 et f_2 on a un système de six équations à six inconnues :

$$\begin{cases} f_1(t) & = & 0 \\ f_2(t) & = & 0 \\ f_1(t) & = & 1 \\ f_2(t) & = & 1 \\ f_1'(t) & = & 0 \\ f_2'(t) & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \\ a_1+b_1 & = & 1 \\ a_2+b_2 & = & 1 \\ b_2 & = & 0 \\ 2\mathrm{a}_1+b_1 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \\ a_1 & = & -1 \\ a_2 & = & 1 \\ b_2 & = & 0 \\ b_1 & = & 2 \end{cases}$$

Finalement, $\begin{cases} f_1(t) & = & -t^2+2t \\ f_2(t) & = & t^2 \end{cases}$.

> **Définition :**
> La courbe définie, pour t appartenant à l'intervalle $[0;1]$, par :
> $$\vec{OM}(t)=\vec{V}_0+(-t^2+2\mathrm{t})\vec{V}_1+t^2\vec{V}_2$$
> est appelée la courbe de Bézier associée aux trois vecteurs contraintes $\vec{V}_i$.

2. Présentation par points de définition et polynômes de Bernstein

Les courbes de Bézier peuvent être aussi définies par des points donnés et fixés dans le plan, contrairement au paragraphe précédent, où la courbe était définie par des vecteurs. L'intérêt de cette définition est que le nombre de points contraintes n'est pas limité, contrairement à la définition "par vecteurs et contraintes".

2.1. Polynômes de Bernstein

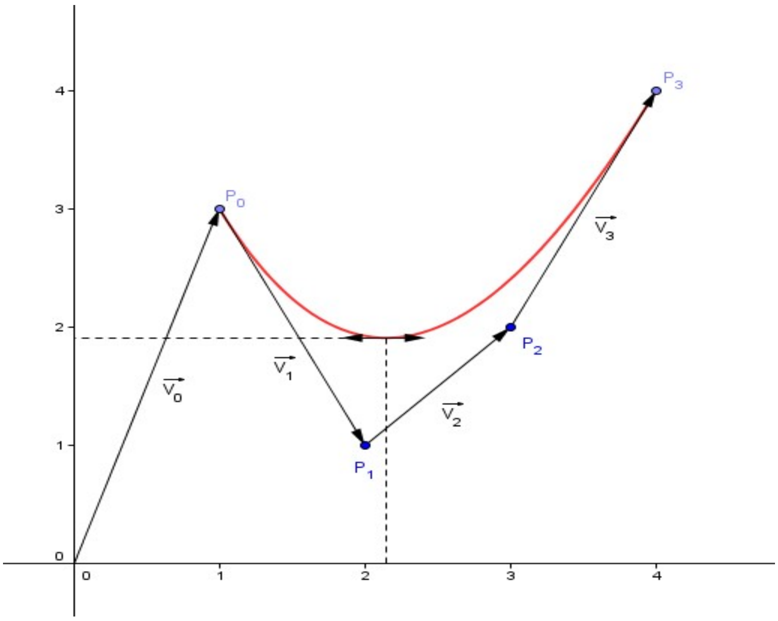
Rappelons l'expression, où a et b sont des nombres réels :
$$(a+b)^3=a^3+3\mathrm{a}^2b+3\mathrm{ab}^2+b^3$$
Posons $a=1-t$ et $b=t$, ($t\in[0;1]$) alors l'expression devient :
$$[(1-t)+t]^3=(1-t)^3+3(1-t)^2t+3(1-t)t^2+t^3=1 .$$
Les polynômes de Bernstein, notés $B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}$ et $B_{3,3}$, sont les polynômes qui sont les termes de cette somme, pris dans l'ordre, c'est-à-dire :
$B_{0,3}(t)=(1-t)^3$, $B_{1,3}(t)=3\mathrm{t}(1-t)^2$, $B_{2,3}(t)=3(1-t)t^2$ et $B_{3,3}(t)=t^3$.

> **Définition :**
> On appelle polynômes de Bernstein les polynômes définis par :
> $B_{i,n}(t)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$, où n est un entier naturel et i est un entier naturel inférieur ou égal à n,
> et où $\binom{n}{i}$ est défini par : $\binom{n}{i}=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Remarque :
Les polynômes $B_{i,n}$ sont de degré n.
De plus, on peut généraliser le cas précédent $n=3$ à n entier naturel quelconque :
$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)=\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}=[(1-t)+t]^n=1$ donc $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)=1$ pour $n\in\mathbb{N}$.

2.2. Courbe de Bézier

La courbe de Bézier définie par les vecteurs contraintes peut aussi être définie avec les polynômes de Bernstein. On va l'observer ci-dessous dans le cas où $n=3$, puis on l'admettra pour n entier naturel quelconque.
Reprenons le cas particulier de la courbe de Bézier définie avec quatre vecteurs contraintes $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2,$ et $\vec{V}_3$, et définissons les quatre points P_0, P_1, P_2 et P_3 tels que :
$\vec{OP}_0=\vec{V}_0$, $\vec{P_0P_1}=\vec{V}_1$, $\vec{P_1P_2}=\vec{V}_2$ et $\vec{P_2P_3}=\vec{V}_3$.



La courbe de Bézier est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :
$\vec{OM}(t)=\vec{OP}_0+(t^3-3t^2+3t)\vec{P_0P_1}+(-2t^3+3t^2)\vec{P_1P_2}+t^3\vec{P_2P_3}$, $t\in[0;1]$
Or :
$\vec{P_0P_1}=\vec{OP}_1-\vec{OP}_0$, $\vec{P_1P_2}=\vec{OP}_2-\vec{OP}_1$ et $\vec{P_2P_3}=\vec{OP}_3-\vec{OP}_2$,
d'où :
$\vec{OM}(t)=(1-t^3+3t^2-3t)\vec{OP}_0+(t^3-3t^2+3t+2t^3-3t^2)\vec{OP}_1+(-2t^3+3t^2-t^3)\vec{OP}_2+t^3\vec{OP}_3$

Donc : $\vec{OM}(t)=B_{0,3}(t)\vec{OP}_0+B_{1,3}(t)\vec{OP}_1+B_{2,3}(t)\vec{OP}_2+B_{3,3}(t)\vec{OP}_3$.

On en déduit que, pour $n=3$, la courbe de Bézier définie par quatre vecteurs contraintes peut aussi être définie par quatre points de définition ou de contrôle et les polynômes de Bernstein.

Dans ce dernier cas, les contraintes présentées au début de la leçon sont satisfaites; on déduit des contraintes de position :
$P_0=M_0$ car $\vec{OM}_0=\vec{V}_0$ et $\vec{OP}_0=\vec{V}_0$,
$P_3=M_1$ car $\vec{OM}_1=\vec{V}_0+\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3$
et $\vec{V}_0+\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3=\vec{OP}_0+\vec{P_0P_1}+\vec{P_1P_2}+\vec{P_2P_3}=\vec{OP}_3$.
La courbe de Bézier a pour extrémités les points de définition P_0 et P_3 .

Les contraintes de tangence peuvent s'écrire :
$\vec{P_0P_1}$ est un vecteur directeur de la tangente en P_0 à la courbe de Bézier.
$\vec{P_2P_3}$ est un vecteur directeur de la tangente en P_3 à la courbe de Bézier.

On admettra le théorème suivant qui généralise le résultat démontré dans le cas particulier où $n=3$.

<u>Théorème</u> :
La courbe de Bézier associée à $n+1$ vecteurs contraintes $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$ est aussi définie pour $t\in[0\,;1]$ par :

$$\vec{OM}(t)=\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\vec{OP}_i ,$$

les $n+1$ points P_i étant appelés les points de contrôle de la courbe, vérifiant :
$\vec{OP}_0=\vec{V}_0$ et $\vec{P_{i-1}P_i}=\vec{V}_i$,
pour tout i entier compris entre 1 et n .

2.3. Propriétés de la courbe de Bézier (cas général)

<u>Propriété</u> :
La courbe de Bézier de points de contrôle $P_0, P_1, \dots, P_n$ passe par les points P_0 et P_n .

Démonstration :

On a $\vec{OM}(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\vec{OP}_k$

$$\vec{OM}(t)=(1-t)^n\vec{OP}_0+nt(1-t)^{n-1}\vec{OP}_1+\dots+nt^{n-1}(1-t)\vec{OP}_{n-1}+t^n\vec{OP}_n .$$

Le seul terme ne contenant pas le facteur t est $(1-t)^n\vec{OP}_0$.
Donc $\vec{OM}(1)=\vec{OP}_n\Rightarrow M(0)=P_0$

Le seul terme ne contenant pas $(1-t)$ est $t^n\vec{OP}_n$.
Donc $\vec{OM}(1)=\vec{OP}_n\Rightarrow M(1)=P_n$.

Propriété :
La droite $(P_0 P_1)$ est tangente à la courbe en P_0.
La droite $(P_{n-1} P_n)$ est tangente à la courbe en P_n.

Démonstration : $(n>2)$

$$\vec{OM}(t)=(1-t)^n \vec{OP}_0+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \vec{OP}_n+t^n \vec{OP}_{n.}$$

$$\vec{OM}'(t)=-n(1-t)^{n-1}\vec{OP}_0$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}[kt^{k-1}(1-t)^{n-k}-t^k(n-k)(1-t)^{n-k-1}]\vec{OM}_k+nt^{n-1}\vec{OP}_n .$$

Les deux seuls termes de cette somme ne contenant pas le facteur t sont $-n(1-t)^{n-1}\vec{OP}_0$ et le terme de la somme centrale lorsque $k=1$, soit $\binom{n}{1}[(1-t)^{n-1}-t(n-1)(1-t)^{n-2}]\vec{OP}_1$.

$$\vec{OM}'(0)=-n\vec{OP}_0+\binom{n}{1}\vec{OP}_1=n(\vec{OP}_1-\vec{OP}_0)=n\vec{P_0P_1}$$

ou $\begin{cases} x'(0)=n(x_1-x_0) \\ y'(0)=n(y_1-y_0) \end{cases}$

Donc, la droite $(P_0 P_1)$ est bien tangente à la courbe en P_0.
De même, les deux seuls termes de la somme ne contenant pas le facteur $(1-t)$ sont $nt^{n-1}\vec{OP}_n$ et le terme de la somme centrale lorsque $k=n-1$, soit

$$\binom{n}{n-1}[(n-1)t^{n-2}(1-t)^1-t^{n-1}.(1).(1-t)^0]\vec{OP}_{n-1} .$$

Soit $\vec{OM}'(1)=-\binom{n}{n-1}\vec{OP}_{n-1}+n\vec{OP}_n=n(\vec{OP}_n-\vec{OP}_{n-1})=n\vec{P_{n-1}P_n}$

ou $\begin{cases} x'(1)=n(x_n-x_{n-1}) \\ y'(1)=n(y_n-y_{n-1}) \end{cases}$

Donc la droite $(P_{n-1} P_n)$ est bien tangente à la courbe P_n.

Exercice :
Calculer la représentation paramétrique et tracer la courbe C_1 de Bézier définie par les points de contrôle $P_0(0;0)$, $P_1(3;1)$ et $P_2(2;2)$.
Comparer le tracé de cette courbe avec la courbe C_2 de Bézier définie par les mêmes points de contrôle, en déplaçant le point P_1 : $P_1(5;0)$.

Résolution (succinte) :
On a $\vec{OM}(t)=\sum_{i=0}^{2} B_{i,2}(t)\vec{OP}_i$, pour t compris entre 0 et 1. Calculons les polynômes de

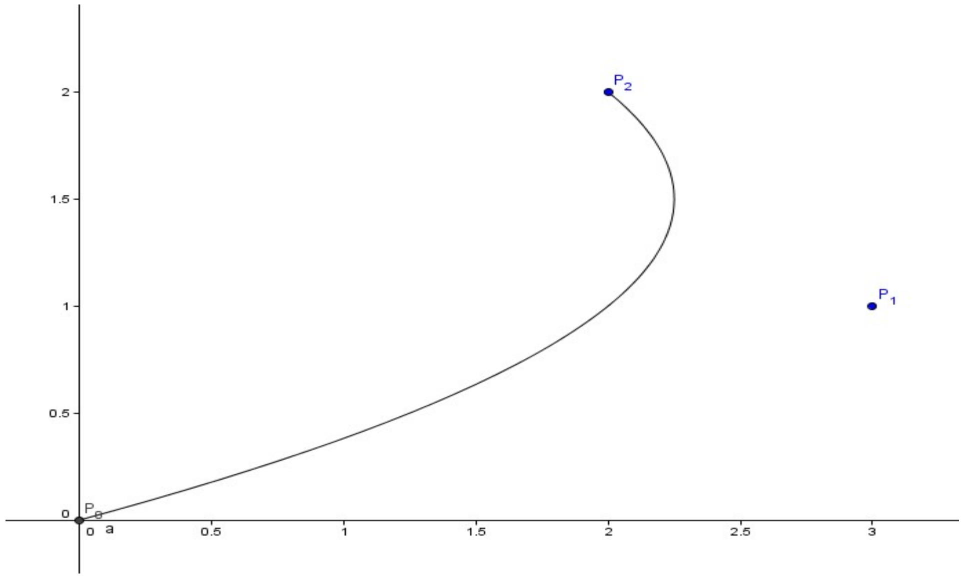
Bernstein :

$B_{0,2}(t)=\binom{2}{0}t^0(1-t)^2=(1-t)^2$, $B_{1,2}(t)=\binom{2}{1}t^1(1-t)^1=2t(1-t)$ et

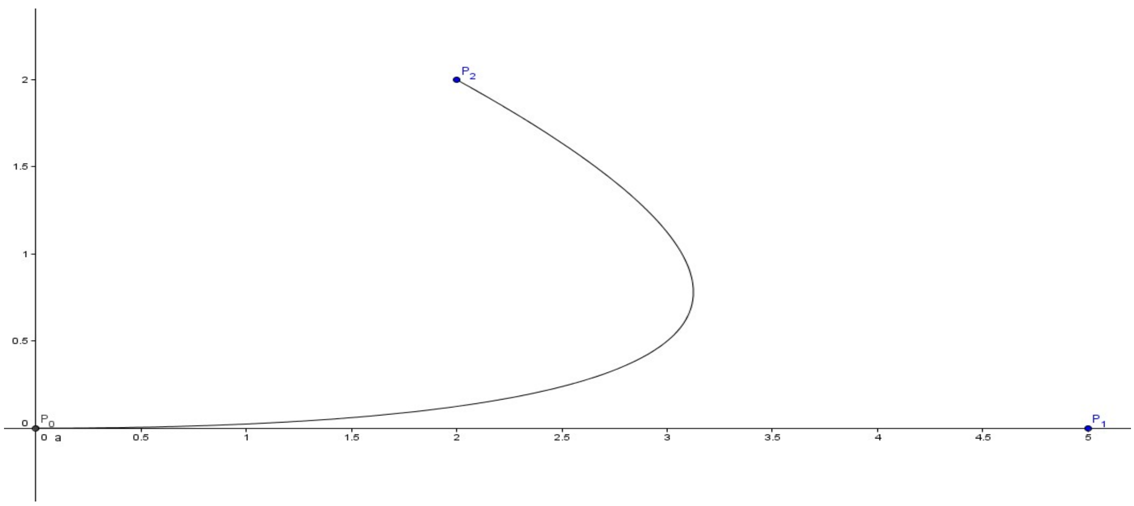
$B_{0,2}(t)=\binom{2}{2}t^2(1-t)^0=t^2$.

Il vient par le calcul : $\begin{cases} x(t) &=& 6t-4t^2 \\ y(t) &=& 2t \end{cases}$.

En étudiant les variations de x et y , on obtient la courbe C_1 :



Concernant la courbe C_2 , les polynômes de Bernstein sont les mêmes que précédemment, on obtient donc : $\begin{cases} x(t) &=& 10t-8t^2 \\ y(t) &=& 2t^2 \end{cases}$, et finalement sa représentation :



On remarque que le déplacement du point P_1 a influencé la courbe en "l'attirant vers lui".

2.4. Courbe de Bézier et barycentre

Pour tout t de l'intervalle [0;1], l'égalité $\vec{OM}(t)=\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\vec{OP_i}$ est de la même forme que

$\vec{OG}=\sum_{i=0}^{n} a_i\vec{OA_i}$ où $\sum_{i=0}^{n} a_i=1$ car $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)=1$.

Donc tout point $M(t)$ d'une courbe de Bézier peut être considéré comme le barycentre de $n+1$ points de définition P_i affectés des coefficients $B_{i,n}(t)$.

Ainsi, on a : $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\vec{M(t)P_i}=\vec{0}$ pour tout $t\in[0;1]$.

Dans cette égalité, le point O n'intervient pas. On vient de découvrir une nouvelle propriété : une courbe de Bézier ne dépend pas de l'origine du repère choisi.

3. Présentation par une suite de vecteurs

Il s'agit ici de faire une construction géométrique par barycentres successifs.
Des points de contrôle sont fixés dans le plan. L'intérêt de cette méthode est de pouvoir construire très rapidement quelques points de la courbe de Bézier à obtenir, de manière à visualiser son allure.

Rappel : On donne un segment $[AB]$ et t un réel de $[0;1]$. Le point G du segment $[AB]$ tel que $\vec{AG}=t\vec{AB}$ peut être défini comme étant le barycentre du système de points pondérés : $\{(A,1-t);(B,t)\}$. Pour un point O quelconque du plan, ceci équivaut à :
$\vec{OG}=(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}$.

On va d'abord présenter l'algorithme de construction par suite de vecteurs lorsque la courbe de Bézier est définie par trois points de contrôle P_0, P_1 et P_2 . On a :
$\vec{OM}(t)=(1-t)^2\vec{OP_0}+2t(1-t)\vec{OP_1}+t^2\vec{OP_2}$
donc :
$\vec{OM}(t)=(1-t)^2\vec{OP_0}+t(1-t)\vec{OP_1}+t(1-t)\vec{OP_1}+t^2\vec{OP_2}$
soit :
$\vec{OM}(t)=(1-t)[(1-t)\vec{OP_0}+t\vec{OP_1}]+t[(1-t)\vec{OP_1}+t\vec{OP_2}]$.

On appelle G_0 le barycentre du système $\{(P_0,1-t);(P_1,t)\}$ et G_1 le barycentre du système $\{(P_1,1-t);(P_2,t)\}$. Donc l'expression devient :

$$\vec{OM}(t)=(1-t)\vec{OG_0}+t\vec{OG_1}$$

ce qui signifie que $M(t)$ est le barycentre du système $\{(G_0,1-t);(G_1,t)\}$.
Les barycentres construits successivement sont résumés par le schéma suivant, k étant l'étape de construction :

Algorithme de construction :
Les points P_0 , P_1 et P_2 sont placés. On choisit t entre 0 et 1.
Etape 1 : On construit G_0 et G_1 tels que

$$\vec{P_0G_0}=t\,\vec{P_0P_1} \text{ et } \vec{P_1G_1}=t\,\vec{P_1P_2}$$

Etape 2 : On construit M(t) tel que
$\vec{G_0M(t)}=t\,\vec{G_0G_1}$
On obtient donc le point de la courbe voulu, de paramètre *t.*

$$\begin{array}{ccccc}
P_0=P_{0,0} & & & & \\
 & > & G_0=P_{1,0} & & \\
P_1=P_{0,1} & & & > & M(t)=P_{1,0} \\
 & > & G_1=P_{1,1} & & \\
P_2=P_{0,2} & & & &
\end{array}$$

Pour $n=3$, c'est-à-dire lorsque la courbe de Bézier est définie avec quatre points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 , l'algorithme de construction de $M(t)$ est le même, à ceci près qu'il y a une étape supplémentaire de construction. En résumé:

- à l'étape 1, sont construits trois points barycentres intermédiaires notés $P_{1,0}, P_{1,1}$ et $P_{1,2}$;
- à l'étape 2, sont construits deux points barycentres intermédiaires notés $P_{2,0}, P_{1,1}$ et $P_{2,1}$;
- à l'étape 3 (étape finale), le point $M(t)$ noté $P_{3,0}$.

L'intérêt de cette méthode est de pouvoir construire très rapidement quelques points de la courbe à obtenir, de manière à visualiser son allure.
On peut le généraliser :

<u>Théorème</u> (Algorithme de construction) :
Soit t un réel de $[0;1]$. Les points $P_{0,i}=P_i$ sont les points de contrôle de la courbe $(i=0,1,\ldots,n)$.
A l'étape $k(k\geqslant 1)$, pour p entier inférieur ou égal à $n-k$, on définit le point $P_{k,p}$, barycentre des deux points $P_{k-1,p}$ et $P_{k-1,p+1}$ (points de l'étape précédente, c'est-à-dire à l'étape $k-1$), affectés des coefficients respectifs $(1-t)$ et t .
Le dernier point $P_{n,0}$ est le point $M(t)$ de la courbe de Bézier.

On admettra le théorème suivant, qui concerne la tangente en un point de la courbe de Bézier définie par une suite de vecteurs.

<u>Théorème</u> :
Pour tout t appartenant à l'intervalle $[0;1]$, la tangente à la courbe de Bézier au point $M(t)$ a pour vecteur directeur :
$\vec{OP_{n-1,1}}-\vec{OP_{n-1,0}}=\vec{P_{n-1,0}P_{n-1,1}}$, si ce vecteur n'est pas nul.

Ainsi, on va voir dans l'illustration que pour $n=3$, le vecteur $\vec{A''B''}$ est tangent à la courbe au point $M(t)$.

Illustrons cette construction à l'aide de Geogebra :