Sans utilisation des TICE

TYPE D'ACTIVITÉ PÉDAGOGIQUE :
Introduction d'une notion.

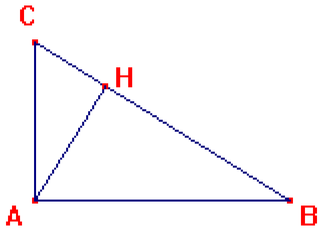
THÈME :
La notion de racine carrée d'un nombre positif.

NIVEAU :
3ème.

CE DOSSIER COMPREND :
2 pages d'exercices.

TRAVAIL DEMANDÉ :

1. Proposer une situation d'enseignement permettant d'introduire la notion de racine carrée d'un nombre positif en partant d'un cadre géométrique.
Indication : Ici nous pensons aux situations s'inspirant de la figure



$AH^2 = BH \times CH$.

2. Donner des activités ayant pour objectif l'introduction des propriétés des racines carrées. Proposer des exemples et des contre-exemples.

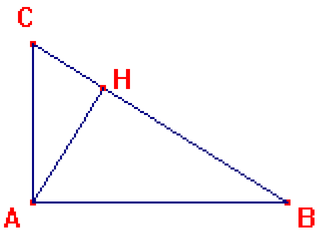
3. Donner une série d'exercices (avec leur corrigé) illustrant les propriétés des racines carrées et mettant en œuvre différentes transformations d'écriture. (On pourra, mais ce n'est pas une obligation, emprunter ces exercices au dossier fourni en annexe.)

4. Proposer un problème de recherche (avec le corrigé) ayant pour objectif de faire la synthèse des différents acquis. Justifier votre choix.

SUR LA FICHE D'EXPOSÉ, ON INDIQUERA :

Le plan de la situation proposée en 1. et deux exercices avec leur corrigé, choisis pour répondre à la question 3.

1. Proposer une situation d'enseignement permettant d'introduire la notion de racine carrée d'un nombre positif en partant d'un cadre géométrique.
Indication : Ici nous pensons aux situations s'inspirant de la figure



$AH^2 = BH \times CH$.

Le parti pris ici est de proposer une séquence d'enseignement dans laquelle on « travaille » des problèmes de constructions à la règle et au compas. Les deux premières questions visent à faire effectuer des constructions que les élèves ont pu déjà rencontrer. La troisième question est directement liée à l'intervention de la racine carrée comme *outil* permettant de réaliser une construction.

On considère les deux segments dessinés ci-dessous qui ont respectivement pour longueur 2 et 5 (unité de longueur = 1 cm). Le but est de construire en utilisant seulement la règle non graduée et le compas certains segments dont les longueurs l sont définies à partir des longueurs des segments précédents. Dans chacun des cas, on donnera la liste des constructions à réaliser comme si les constructions devaient être réalisées par une machine. On effectuera ensuite les constructions sur des schémas différents.

1. Décrire et effectuer les constructions dans les cas suivants.
a. $l = 7$;
b. $l = 3$.
2. Reporter deux segments de longueurs 2 et 5 ayant même origine *O* et appartenant à des droites sécantes en *O*. On note *A* et *B* tels que *OA* = 2 et *OB* = 5. Construire un segment de longueur $l = \frac{2}{5}$.
3. On admettra que dans un triangle rectangle *ABC* rectangle en *A*, le pied de la hauteur issue de A vérifie $AH^2 = BH.CH$. Que vaut alors *AH* si *BH* = 2 cm et *CH* = 5 cm ?
a) Justifier que le point *A* appartient à un cercle que l'on précisera.
b) En déduire une construction d'un triangle rectangle en *A* tel que *BH.CH* = 10 cm.
c) Construire un segment de longueur $\sqrt{10}$ cm.

2. Donner des activités ayant pour objectif l'introduction des propriétés des racines carrées. Proposer des exemples et des contre-exemples.

Propriétés à illustrer : pour tous a et b ≥ 0
- $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.
- $\sqrt{a^2} = a$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

On peut proposer de tester toutes ces formules sur des couples de nombres d'ordre de grandeurs très différentes en laissant les élèves utiliser leur calculatrice. En résumé, il s'agira de distinguer les formules justes des fausses.

Pour cette question, je vous renvoie aux suggestions d'exercices proposés par vos camarades pendant la séance du mercredi 8 février.

3. Donner une série d'exercices (avec leur corrigé) illustrant les propriétés des racines carrées et mettant en œuvre différentes transformations d'écriture. (On pourra, mais ce n'est pas une obligation, emprunter ces exercices au dossier fourni en annexe.)

Si on utilise les énoncés donnés en annexe, je vous propose les exercices suivants. Mais, ici aussi, les propositions faites par vos camarades lors de la présentation sont parfaitement acceptables.

34. et 35. Pour apprendre à repérer des carrés parfaits sous un radical et réduire les écritures.

41. Idem, avec en plus la gestion des multiplications et 55 pour introduire les propriétés relatives aux quotients.

4. Proposer un problème de recherche (avec le corrigé) ayant pour objectif de faire la synthèse des différents acquis. Justifier votre choix.

Voici une situation qui n'est pas sans lien avec une situation de la vie courante. Quel lien existe-t-il entre les formats de papier A4 et A3 ?
Pour élucider cette question, on part du fait que les feuilles sont des rectangles de papier non carrés et qu'on appelle longueur (resp. largeur) d'une feuille la plus grande (resp. petite) de ses dimensions.
On sait (et on peut le vérifier avec des rames de feuilles pour photocopieuse) que deux feuilles de papier format A4, accolées suivant leur longueur, donnent une feuille de papier format A3.
On sait aussi que pour les deux formats, les rapports $\frac{\text{largeur}}{\text{longueur}}$ sont les mêmes.
1) En notant l la longueur d'une feuille de papier format A4 et L la longueur d'une feuille format A3, justifier que $L^2 = 2l^2$.
Avec les notations retenues, la largeur d'une feuille au format A4 est égale à $\frac{L}{2}$ et le rapport $\frac{\text{largeur}}{\text{longueur}}$ est égal à $\frac{L}{2l}$. Pour une feuille au format A3, ce rapport est égal à $\frac{l}{L}$. Les rapports sont égaux se traduit par : $\frac{L}{2l} = \frac{l}{L}$ et donc $L^2=2l^2$. (On incitera évidemment les élèves à faire un dessin.)
2) En déduire $\frac{L}{l}$.
On a $\left(\frac{L}{l}\right)^2 = 2$. Comme L et l sont des nombres positifs, $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.
3) Pour une feuille de format A4, la largeur est de 21 cm, quelle est sa longueur ?
Si la largeur est de 21 cm, la longueur est de $21\times\sqrt{2} \approx 29{,}7$ cm.

4) Le format A2 est défini à partir du format A3 comme le format A3 à partir du format A4. Quel est alors le rapport entre longueur et largeur d'une feuille au format A2 ? En déduire la longueur d'une feuille au format A2 à l'aide de la longueur d'une feuille au format A4.

Le rapport entre longueur et largeur reste le même quand on passe d'un format à un autre, il est donc égal à $\sqrt{2}$. Si on passe du format A2 au format A3, on a :

$$L(A2) = \sqrt{2}\,l(A2) = \sqrt{2}\times L(A3) = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\,l(A3) = \left(\sqrt{2}\right)^2 L(A4) = 2L(A4).$$

5) Quel est le rapport entre les diagonales des feuilles aux formats A3 et A4 ? A2 et A3 ? A2 et A4 ?

La diagonale d'un rectangle de longueur L et de largeur l est égale à $\sqrt{L^2 + l^2}$. Quand on passe du A4 au A3, les dimensions sont multipliées par $\sqrt{2}$. Les carrés des dimensions sont donc multipliés par 2 et les longueurs des diagonales par $\sqrt{2}$.

On a donc $\frac{\text{diag}(A3)}{\text{diag}(A4)} = \sqrt{2}$, etc.

6) Quelle devrait être la longueur du côté d'une feuille carrée de même aire qu'une feuille au format A4 ?

Si a est la longueur du côté du carré cherché, $a^2 = 21\times 29{,}7$.

D'où, avec la calculatrice, a ≈ 24,87 cm.

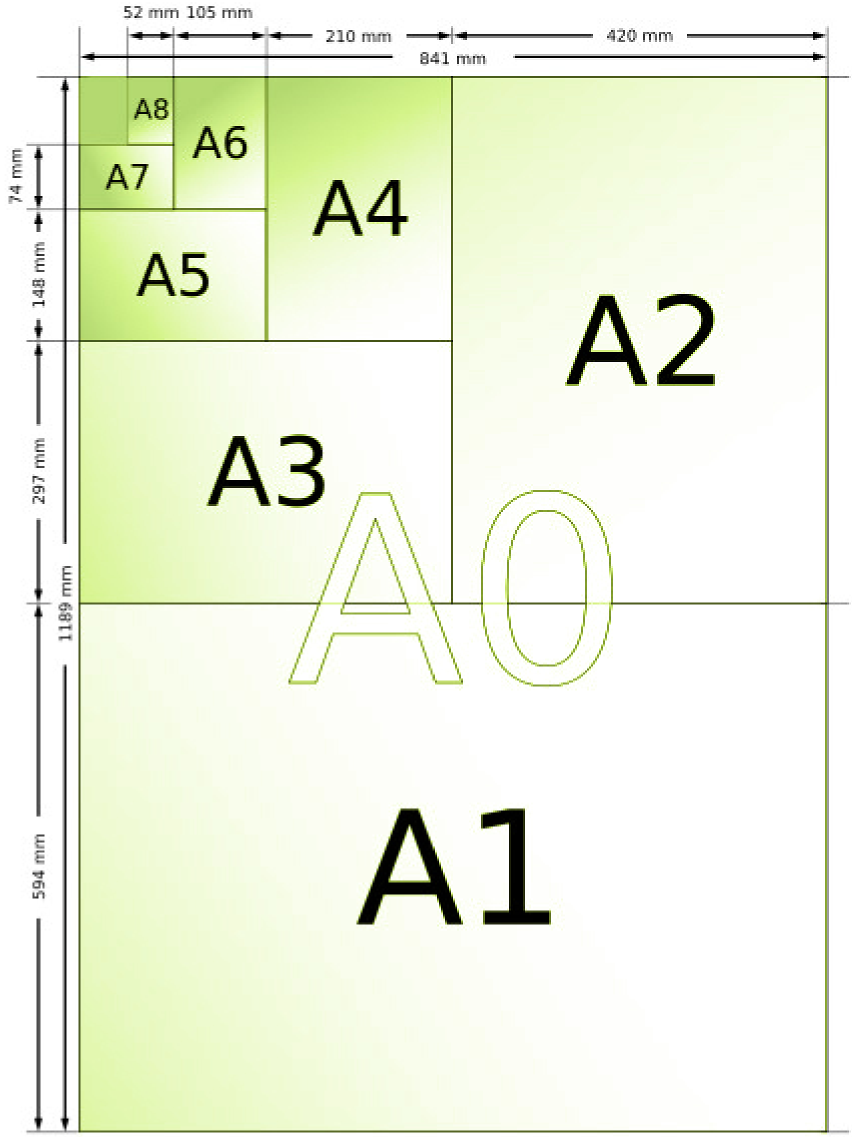
7) Déterminer les dimensions d'une feuille au format A1, puis A0. Quelle est l'aire de cette feuille au format A0 ?

On a vu que $L(A2) = 2\times L(A4) \approx 2\times 29{,}7 = 59{,}4$ (en cm). Alors $l(A1) = L(A2)$ et $L(A1) = \sqrt{2}\times l(A1) = \sqrt{2}\times L(A2) \approx 84$ cm.

Toujours en multipliant par $\sqrt{2}$, on trouve $l(A0) \approx 84$ cm et $L(A0) \approx \sqrt{2}\times 84 \approx 118{,}8$ cm.

L'aire d'une telle feuille est égale à 9980 cm² ≈ 1m².

C'est en fait le point de départ de la définition des différents formats. On part du format A0 qui est celui d'une feuille rectangulaire d'un mètre carré d'aire et dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \sqrt{2}$. Puis, on définit les autres formats en prenant pour longueur du format suivant, la largeur du précédent et en respectant le rapport égal à $\sqrt{2}$.


52 mm
105 mm
210 mm
420 mm
841 mm
74 mm
148 mm
297 mm
594 mm
1189 mm
A8
A7
A6
A5
A4
A3
A2
A1
A0

Questions possibles :

1. Comment fait-on pour calculer précisément la racine carrée d'un nombre réel (positif) ?

Éléments de réponse : on considère des suites numériques convergeant vers la racine à déterminer. L'efficacité du procédé est liée à la « vitesse de convergence » de la suite.
Ex : pour approcher $\sqrt{p}$, où p est un entier qui n'est pas un carré parfait, on considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{p}{u_n}) \end{cases}$, u_0 est donné « assez près » de $\sqrt{p}$.
Cette suite, appelée parfois « suite de Héron » (pour $p = 2$), est en fait déduite de la méthode de Newton et on montre (mais, à mon avis, cela sort des objectifs du concours) qu'elle est d'ordre 2 (au moins), ce qui signifie que le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

2. Qu'est-ce qui distingue un nombre réel comme $\sqrt{2}$ de π ?

Éléments de réponse : dans l'ensemble des nombres réels, on distingue les entiers naturels $\mathbb{N}$, les entiers relatifs $\mathbb{Z}$, les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, avec l'inclusion triviale : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (on « insère parfois les nombres décimaux entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$). Ensuite, le complément de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est constitué des nombres irrationnels. On distingue parmi ces nombres, les irrationnels *algébriques* – qui sont des nombres solutions d'équations de la forme : $P(x) = 0$, où $P \in \mathbb{Z}[X]$, l'ensembles des polynômes à coefficients entiers – et les nombres irrationnels non algébriques qui sont appelés des nombres *transcendants*.
Il est clair, avec cette définition, que $\sqrt{2}$ est algébrique puisque solution de l'équation $X^2 - 2 = 0$. On démontre, mais c'est difficile, que π est transcendant (Lindemann en 1882). La question de la transcendance de certains nombres réels (la majorité) reste une question ouverte en mathématique.

3. La racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie, et la racine cubique ? Expliquer.

Si on considère la fonction « carré » : $x \mapsto x^2$ elle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour définir la fonction racine carrée, son inverse pour la loi $\circ$, d'un nombre négatif, il faudrait (et cela suffirait) qu'elle soit bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais elle ne l'est pas, en particulier elle n'est pas surjective (les réels négatifs n'ont pas d'antécédent(s)). Elle n'est pas non plus bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ car elle n'y est pas injective (deux réels non nuls de signes contraires ont le même carré). Par contre, elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (continue, strictement croissante et $\lim_{+\infty} x^2 = +\infty$) et il existe donc une racine carrée pour chaque réel positif.
Par contre la fonction $x \mapsto x^3$ est, elle, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, d'où la possibilité de définir une racine cubique pour tout réel, quel que soit son signe.

4. La racine carrée d'un nombre complexe existe-t-elle ? Toujours ? Préciser.

Soit $a \in \mathbb{C}$. L'existence de la racine carrée de a (dans $\mathbb{C}$) se ramène à la résolution de l'équation : $z^2 = a$.

Si on résout à partir des formes trigonométriques : $z = \rho e^{i\theta}$ et $a = re^{i\alpha}$, d'où $\rho = \sqrt{r}$ et $2\theta = \alpha\ [2\pi]$, soit encore $\theta = \frac{\alpha}{2}\ [\pi]$, et les solutions $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi)} = \sqrt{r}e^{i\pi}e^{i\frac{\alpha}{2}} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\alpha}{2}} = -z_1$. La (les) racine(s) carrée(s) d'un nombre complexe existe(nt) donc toujours.

Si on cherche à résoudre $z^n = a$, pour n entier supérieur ou égal à 2, on remarque que la même technique conduit à trouver n racines n-ième, de module $\sqrt[n]{r}$ et d'arguments $\theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}, k = 0,1, \dots, n-1$.